Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА

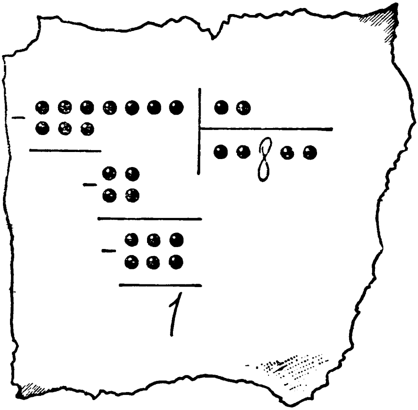
Детгиз, 1954

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА

Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

Я. И ПЕРЕЛЬМАН

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА



ЗАГАДКИ И ДИКОВИНКИ
В МИРЕ ЧИСЕЛ

Государственное Издательство Детской Литературы
Министерства Просвещения РСФСР
Москва 1954

ИЗДАНИЕ ВОСЬМОЕ,
СОКРАЩЕННОЕ

ГЛАВА ПЕРВАЯ

СТАРОЕ И НОВОЕ О ЦИФРАХ И НУМЕРАЦИИ

ТАИНСТВЕННЫЕ ЗНАКИ

В марте 1917 года жители Ленинграда (тогда — Петрограда) были немало озадачены и даже встревожены таинственными знаками, появившимися неизвестно как у дверей многих квартир. Молва приписывала этим знакам разнообразные значения. Те, которые мне пришлось видеть, имели форму восклицательных знаков, чередующихся с крестами.

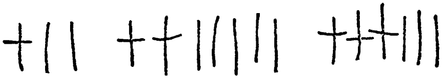
Пошли зловещие слухи о грабительских шайках, помечающих квартиры будущих жертв. „Комиссар временного правительства по г. Петрограду“, успокаивая население, утверждал, что „таинственные знаки, которые чьей-то невидимой рукой делаются на дверях мирных обывателей в виде крестов, букв, фигур, как выяснилось по произведенному дознанию, делаются провокаторами и германскими шпионами“; он приглашал жителей все эти знаки стирать и уничтожать, „а в случае обнаружения лиц, занимающихся этой работой, задерживать и направлять по назначению“.

Таинственные восклицательные черточки и зловещие кресты появились также у дверей моей квартиры и квартир моих соседей. Некоторый опыт в распутывании замысловатых задач помог мне, однако, разгадать нехитрый и совсем не страшный секрет этой тайнописи.

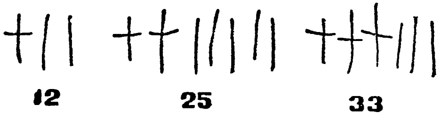
Своими соображениями я поделился с согражданами, поместив в газете следующую заметку:

„ТАИНСТВЕННЫЕ ЗНАКИ

В связи с таинственными знаками, появившимися на стенах многих петроградских домов, небесполезно разъяснить смысл одной категории подобных знаков, которые, несмотря на зловещее начертание, имеют самое невинное происхождение. Я говорю о знаках такого типа:



Подобные знаки замечены во многих домах на черных лестницах, у дверей квартир. Обычно знаки этого типа имеются у всех дверей данного дома, причем в пределах одного дома двух одинаковых знаков не наблюдается. Их мрачное начертание естественно внушает тревогу жильцам. Между тем смысл их, вполне невинный, легко раскрывается, если сопоставить их с номерами соответствующих квартир. Так, например, приведенные выше знаки найдены мною у дверей квартир № 12, № 25 и № 33:



Нетрудно догадаться, что кресты означают десятки, а палочки — единицы. Так оказалось во всех без исключения случаях, которые мне приходилось наблюдать. Своеобразная нумерация эта, очевидно, принадлежит дворникам-китайцам[1], не понимающим наших цифр. Появились эти знаки, конечно, давно, но только в дни февральской революции обратили на себя внимание граждан“[2].

Таинственные знаки такого же очертания, но только не с прямыми, а с косыми крестами, обнаружены были и в таких домах, где дворниками служили пришедшие из деревень русские крестьяне. Здесь уже нетрудно было выяснить истинных авторов „тайнописи“, вовсе не подозревавших, что их безыскусственные обозначения номеров квартир только теперь были замечены и вызвали такой переполох.

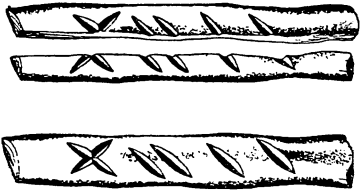
СТАРИННАЯ НАРОДНАЯ НУМЕРАЦИЯ

Откуда взяли петроградские дворники этот простой способ обозначения чисел: кресты — десятки, палочки — единицы? Конечно, они не придумали этих знаков в городе, а привезли их из родных деревень. „Нумерация“ эта давно уже в широком употреблении и понятна была каждому, даже неграмотному прежде крестьянину. Восходит она, без сомнения, к глубокой древности и употребительна не только у нас. Не говоря уже о родстве с

---

[1] Их было много тогда в Петрограде. Позднее я узнал, что китайский иероглиф для десяти имеет как раз указанную форму креста (китайцы не употребляют наших „арабских“ цифр).

[2] Читателю наших дней покажется, вероятно, очень странным что знаки эти оставались до дней февральской революции не замеченными. Напомню, однако, что большинство живших в квартирах с двумя входами пользовались обычно только парадной лестницей и впервые вышли на черную в дни революции, когда парадные двери были закрыты.



Бирка — палочка с зарубками, которой издавна пользовались для счетных записей неграмотные русские крестьяне. Простые зарубки обозначают единицы, косые кресты — десятки. Если бирку раскалывали надвое, обе ее половинки служили счетными документами, которые нельзя подделать, потому что невозможно изготовить фальшивую половинку, которая точно совпадала бы при проверке с настоящей.

китайскими обозначениями, бросается в глаза и сходство этой упрощенной нумерации с римской: и в римских цифрах палочки означают единицы, косые кресты — десятки.

Любопытно, что эта народная нумерация была некогда у нас даже узаконена: по такой именно системе, только более развитой, должны были вестись сборщиками податей записи в податной тетради. „Сборщик,— читаем мы в старом „Своде законов“, — принимая от кого-либо из домохозяев вносимые к нему деньги, должен сам или через писаря записать в податной тетради против имени того домохозяина, которого числа сколько получено денег, выставляя количество принятой суммы цифрами и **знаками**. Знаки сии для сведения всех и каждого ввести повсеместно одинаковые, а именно:

десять рублей означать знаком	□
рубль	○
десять копеек	╳
копейку	|
четверть	—

Например, двадцать восемь рублей пятьдесят семь копеек три четверти:

□□○○○○○○○○╳╳╳╳╳|||||||≡

В другом месте того же тома „Свода законов“ находим еще раз упоминание об обязательном употреблении народных числовых обозначений. Приводятся особые знаки для 1000 руб.— в виде шестиконечной звезды с крестом в ней, и для 100 руб.— в виде колеса с восемью спицами. Но обозначения для 1 руб. и 10 коп. здесь устанавливаются иные, чем в предыдущем законе.

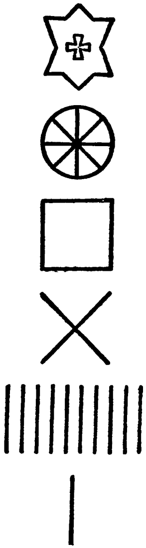
Вот текст закона об этих так называемых „ясачных знаках“:

„Чтобы на каждой квитанции, выдаваемой Родовитому Старосте, от которого внесен будет ясак, кроме изложения словами, было показываемо особыми знаками число внесенных рублей и копеек так, чтобы сдающие простым счетом сего числа могли быть уверены в справедливости показания“ [1].

Употребляемые в квитанции знаки означают:

(звезда)	1000	руб.,
(колесо)	100	руб.,
□	10	руб.,
×	1	руб.,
||||||||||	10	коп.,
|	1	коп.

„Дабы не можно было сделать здесь никаких прибавлений, все таковые знаки очерчивать кругом прямыми линиями“. Например: 1232 р. 24 к. изображают так (см. рисунок на стр. 8).



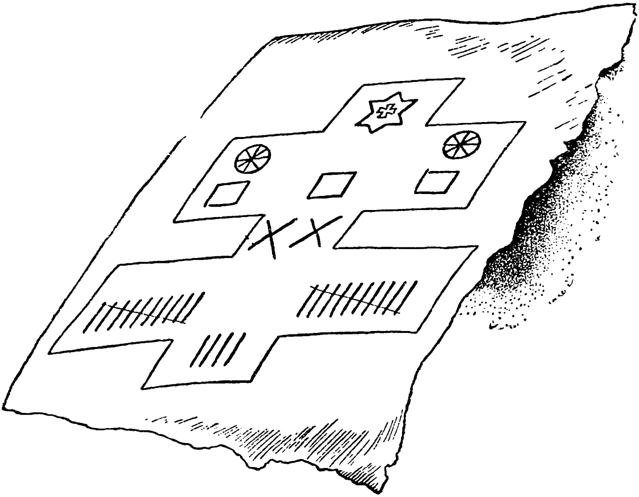
Как видите, употребляемые нами арабские и римские цифры — не единственный способ обозначения чисел. В старину применялись у нас другие системы письмен-

---

[1] Это показывает, что описанные знаки были в широком употреблении среди населения.

ного счисления, отдаленно сходные с римскими и совсем не сходные с арабскими цифрами.

Но и это еще не все способы изображения чисел, какие были в употреблении: многие торговцы, например, имели



Старинная квитанция в уплате ясака (подати) на сумму 1232 руб. 24 коп., написанная народными цифровыми знаками.

свои секретные знаки для числовых обозначений — так называемые торговые „меты“. О них побеседуем сейчас подробнее.

СЕКРЕТНЫЕ ТОРГОВЫЕ МЕТЫ

В дореволюционное время на вещах, купленных у офеней[1] или в частных магазинах, особенно провинциальных, можно было зачастую заметить непонятные буквенные обозначения вроде

а ве *в уо.*

---

[1] Офеня — бродячий торговец, разносчик, продававший по деревням галантерею, мануфактуру, книжки, лубочные картинки.

Это не что иное, как цена вещи без запроса, которую торговец обозначал на товаре, но так, однако, чтобы ее не мог разгадать покупатель. Бросив взгляд на эти буквы, торговец сразу проникал в их скрытый смысл и, сделав надбавку, называл покупателю цену с запросом.

Система обозначения была весьма проста. Торговец выбирал какое-нибудь слово, составленное из 10 различных букв; чаще всего останавливали выбор на словах: *трудолюбие, правосудие, миролюбецъ, Миралюбовъ*. Первая буква слова обозначала 1, вторая — 2, третья — 3 и т. д.; десятою буквою обозначался ноль. С помощью этих условных букв-цифр торговец и обозначал на товарах их цену, храня в строгом секрете „ключ" к своей системе прибылей.

Если, например, выбрано было слово:

п	*р*	*а*	*в*	*о*	*с*	*у*	*д*	*и*	*е*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

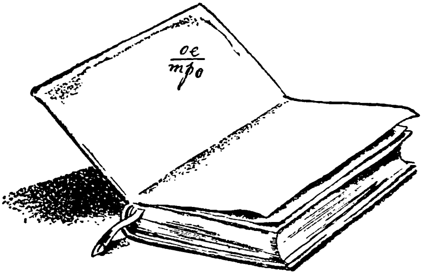
то цена 4 руб. 75 коп. обозначалась так:

в уо.

Иногда цена на товаре писалась в виде дроби; например, на одной из купленных мною книг (см. рисунок) имеется обозначение

$$\frac{\textit{ое}}{\textit{тро}}.$$

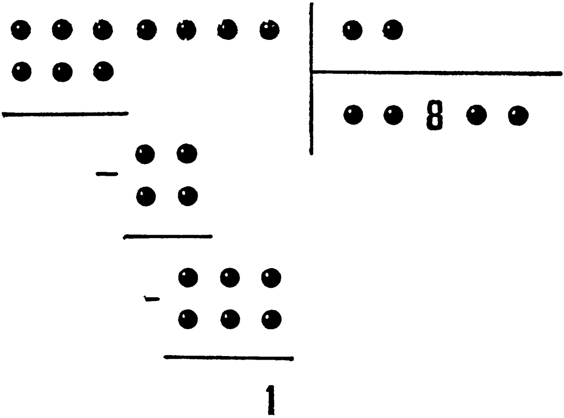
Это значит, при ключе „трудолюбие", что надо запросить 1 руб. 25 коп., себе же книга стоила 50 коп.



Цена книги, записанная торговцем при помощи секретного десятибуквенного слова.
Запись означает, что книга стоит себе 50 коп., а продается за 1 руб. 25 коп.

ПЕШКИ ВМЕСТО ЦИФР

После только что сказанного легко сообразить, что числа можно изображать не только с помощью цифр, но и с помощью любых иных знаков или даже предметов: карандашей, перьев, линеек, резинок и т. п., надо только условиться приписывать каждому предмету значение какой-нибудь определенной цифры. Можно даже, ради курьеза, с помощью таких цифр-предметов изображать действия над числами: складывать, вычитать, умножать, делить.



Попробуйте доискаться значения всех цифр этого деления!

В одном зарубежном шахматном журнале была предложена задача: раскрыть истинный смысл следующего примера деления чисел, в котором почти все цифры заменены пешками (на нашем рисунке — черными кружками). Из 28 цифр известны только две: одна (8) в частном и другая (1) в остатке. Казалось бы, доискаться значения прочих 26 цифр, обозначенных кружками, немыслимо. Между тем это сравнительно несложная задача для каждого, кто отчетливо представляет себе смысл отдельных операций, входящих в состав действия деления.

Вот какой ход рассуждений приводит нас к цели.

Вторая цифра частного есть, конечно, 0. Это следует из того, что к остатку от первого вычитания снесена не одна цифра, а две: ясно, что после снесения первой цифры составилось число, меньшее делителя; а в таких случаях очередная цифра частного 0.

По сходным основаниям заключаем, что четвертая цифра частного также 0.

Всматриваясь в расположение кружочков, замечаем, что двузначный делитель, будучи умножен на 8, дает число двузначное; когда же его умножают на первую (пока неизвестную) цифру частного, получается число из трех цифр. Значит, эта первая цифра частного больше 8; такой цифрой может быть только 9.

Сходным образом устанавливаем, что и последняя цифра частного — 9.

Теперь частное определилось: 90 809. Остается раскрыть смысл делителя. Делитель состоит, мы знаем, из двух цифр; кроме того, расположение кружков говорит о том, что это двузначное число при умножении на 8 дает также двузначное число; при умножении же на 9 оно дает произведение, состоящее уже из трех цифр. Что же это за число? Производим испытания, начиная с наименьшего двузначного числа — 10:

$$10 \times 8 = 80,$$
$$10 \times 9 = 90.$$

Число 10, как видим, не удовлетворяет требуемым условиям: оба произведения двузначные. Испытываем следующее двузначное число — 11:

$$11 \times 8 = 88,$$
$$11 \times 9 = 99.$$

Число 11 также, очевидно, не годится: оба произведения снова двузначные. Испытываем 12:

$$12 \times 8 = 96,$$
$$12 \times 9 = 108.$$

Число 12 удовлетворяет всем требованиям. Нет ли еще таких чисел? Испытаем 13:

$$13 \times 8 = 104,$$
$$13 \times 9 = 117.$$

Оба произведения трехзначные; следовательно, 13 не годится. Ясно, что неподходящими являются и все числа, большие чем 13.

Итак, единственный возможный делитель — 12. Зная делитель, частное и остаток, легко находим делимое и восстанавливаем весь случай деления.

Итак,

$$\text{делимое} = 90\,809 \times 12 + 1 = 1\,089\,709.$$

Случай деления:

```
1089709 | 12
108     |90809
-------
  97
  96
  ---
   109
   108
   ---
     1
```

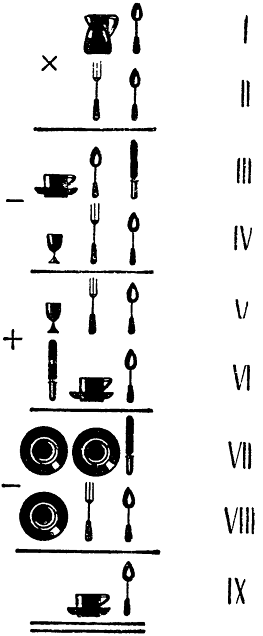
Как видим, по двум известным цифрам нам удалось установить смысл 26 неизвестных цифр.

АРИФМЕТИКА ЗА ЗАВТРАКОМ

Перед нами ряд действий над числами, обозначенными предметами сервировки стола (см. рисунок). Вилка, ложка, нож, кувшинчик, тарелка — все это знаки, каждый из которых заменяет определенную цифру.

Глядя на эту группу ножей, вилок, посуды и т. п., попробуйте угадать: какие именно числа здесь обозначены?

С первого взгляда задача кажется очень трудной: приходится разгадывать настоящие иероглифы[1], как сделал некогда француз Шампольон[2]. Но ваша задача гораздо легче. Вы ведь знаете, что числа здесь, хотя обозначены вилками, ножами, ложками и т. п., написаны по десятичной системе счисления, то-есть вам известно, что тарелка, стоящая на втором месте (считая справа), есть цифра десятков, что предмет направо от нее — цифра единиц, а по левую сторону — цифра сотен. Кроме того, вы знаете, что расположение всех этих предметов имеет определенный смысл, который вытекает из сущности арифметических действий, производимых над обозначенными ими числами. Все это может значительно облегчить вам решение предложенной задачи.



Разгадайте, над какими числами производятся обозначенные здесь арифметические действия!

Вот как можно доискаться значения расставленных здесь предметов. Рассматривая первые три ряда на нашем рисунке, вы видите, что „ложка“, умноженная на

---

[1] Иероглиф — фигурный знак, обозначающий или целые понятия, или отдельные слоги и звуки речи.

[2] Шампольон (1790—1832) — знаменитый французский филолог, основатель египтологии — науки, изучающей язык, историю и культуру древнего Египта и прилегающих к нему стран.

„ложку“, дает „нож“. А из следующих рядов видно, что „нож“ без „ложки“ дает „ложку“ или что „ложка“, прибавленная к „ложке“, дает „нож“. Какая же цифра дает одно и то же и при удвоении и при умножении сама на себя? Это может быть только 2, потому что $2 \times 2 = 2 + 2$. Таким образом узнаём, что „ложка“ обозначает 2 и, следовательно, „нож“ — 4.

Теперь идем дальше. Какая цифра обозначена „вилкой“? Попробуем разгадать это, присмотревшись к первым трем рядам, где „вилка“ участвует в умножении, и к рядам *III*, *IV* и *V*, где та же „вилка“ фигурирует в действии вычитания. Из группы вычитания вы видите, что, отнимая в разряде десятков „вилку“ от „ложки“, получаем в результате „вилку“, то-есть при вычитании „вилки“ из двойки получается „вилка“. Это может быть в двух случаях: либо „вилка“ обозначает 1, и тогда $2 - 1 = 1$; либо же „вилка“ обозначает 6, и тогда, вычитая 6 из 12 (единица высшего разряда занимается у „чашки“), получаем 6.

Что же выбрать: 1 или 6? Испытаем, годится ли 6 для „вилки“ в других действиях. Обратите внимание на сложение *V* и *VI* рядов: „вилка“ (то-есть 6), прибавленная к „чашке“, дает „тарелку“; значит, „чашка“ должна быть меньше 4 (потому что в рядах *VII* и *VIII* при вычитании „вилки“ из „тарелки“ получается „чашка“). Но „чашка“ не может обозначаться двойкой, так как двойка обозначена уже „ложкой“; не может „чашка“ быть и единицей — иначе вычитание *IV* ряда из *III* не могло бы дать трехзначного числа в *V* ряду. Не может, наконец, „чашка“ обозначать и 3 — вот почему: если „чашку“ принять за 3, то „бокальчик“ (ряды *IV* и *V*) должен быть принят за единицу, потому что $1 + 1 = 2$, то-есть „бокальчик“, прибавленный к „бокальчику“, дает „чашку“, убавленную на единицу, которая была занята у него при вычитании в разряде десятков; „бокальчик“ же не может быть принят за единицу, потому что тогда „тарелка“ в *VII* ряду будет обозначать в одном случае цифру 5 („бокальчик“, сложенный с „ножом“), а в другом — цифру 9 („вилка“, прибавленная к „чашке“), чего быть не может. Значит, нельзя было „вилку“ принимать за 6, а надо было принять ее за единицу.

Узнав путем таких — довольно, правда, долгих — поисков, что „вилка“ обозначает цифру 1, мы дальше идем более уверенно и быстро. Из действия вычитания в *III* и *IV* рядах видим, что „чашка“ обозначает либо 6, либо 8. Но 8 приходится отвергнуть, потому что тогда вышло бы, что „бокальчик“ должен обозначать 4, а мы знаем, что цифра 4 обозначена „ножом“. Итак, „чашка“ обозначает цифру 6, а следовательно, „бокальчик“ — цифру 3.

Какая же цифра обозначена „кувшинчиком“ в *I* ряду? Это легко узнать, раз нам известно произведение (*III* ряд, 624) и один из множителей (*II* ряд, 12). Разделив 624 на 12, получаем 52. Следовательно, „кувшинчик“ обозначает 5.

Значение „тарелки“ определяется просто: в *VII* ряду „вилка“, прибавленная к „чашке“, и „бокальчик“, прибавленный к „ножу“, дают порознь „тарелку“, то-есть „тарелка“ обозначает число, равное $1+6=3+4=7$.

Итак, мы путем нехитрых арифметических вычислений разгадали иероглифическую надпись из предметов столовой сервировки:

„кувшин“ обозначает 5,
„ложка“ — 2,
„вилка“ — 1,
„нож“ — 4,
„чашка“ — 6,
„бокальчик“ — 3,
„тарелка“ — 7.

А весь ряд арифметических действий, изображенный этой оригинальной сервировкой, приобретает такой смысл:

$$\begin{array}{r} 52\\ \times\ 12\\ \hline 624\\ -\ 312\\ \hline 312\\ +\ 462\\ \hline 774\\ -\ 712\\ \hline 62 \end{array}$$

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ РЕБУСЫ

То, что я называю арифметическими ребусами, — занимательная игра школьников: отгадывание задуманного слова решением задачи вроде той, какую мы решили в предыдущей статье. Загадывающий задумывает слово, состоящее из 10 неповторяющихся букв, — например, „*трудолюбие*“, „*специально*“, „*просвещать*“. Приняв буквы задуманного слова за цифры, загадывающий изображает посредством этих букв какой-нибудь случай деления. Если задумано слово „*просвещать*“, то можно взять такой пример деления:

п р о с в е щ а т ь
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
делимое — *провес*, 123 564
делитель — *овса*, 3548

$$\begin{array}{r|l} 123564 & 3548\\ \cline{2-2} 10644 & 34\\ \cline{1-1} 17124 & \\ 14192 & \\ \cline{1-1} 2932 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \text{провес} & \text{овса}\\ \cline{2-2} \text{пьесс} & \text{ос}\\ \cline{1-1} \text{пщп р с} & \\ \text{п с птр} & \\ \cline{1-1} \text{рто р} & \end{array}$$

Можно взять и другие слова:

делимое — *восстать*, 53 449 890
делитель — *свет*, 4569

$$\begin{array}{l|l} \text{в о с ст а т ь} & \text{свет}\\ \cline{2-2} \text{с в е т} & \text{ппета}\\ \cline{1-1} \quad\text{щщвт} & \\ \quad\text{с в е т} & \\ \cline{1-1} \quad\text{о пть а} & \\ \quad\text{рщс п с} & \\ \cline{1-1} \qquad\text{с с т с т} & \\ \qquad\text{с п п р п} & \\ \cline{1-1} \qquad\quad\text{о а р а ь} & \\ \qquad\quad\text{о е в в р} & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad\text{пщр а} & \end{array}$$

Буквенное изображение определенного случая деления вручается отгадчику, который и должен по этому, на первый взгляд бессмысленному, набору букв угадать задуманное слово. Как следует в подобных случаях доискиваться числового значения букв, читатель уже знает: мы объяснили это, когда решали задачу предыдущей статьи. При некотором терпении можно успешно разгадывать эти арифметические ребусы, если только пример достаточно длинен и дает необходимый материал для догадок и испытаний. Если же выбраны слова, дающие чересчур короткий случай деления, например:

трудолюбие
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
делимое — *блюдо,* 86 745
делитель — *труд,* 1234

```
б л ю д о |труд
б л у б    юе
---------
    у л о
```

то разгадывать очень трудно. В подобных случаях надо просить загадывающего продолжить деление до сотых или тысячных долей, то-есть получить в частном еще два или три десятичных знака. Вот пример деления до сотых долей:

специально
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
делимое — *палец,* 26 734
делитель — *пила,* 2576

```
п а л е ц    | пила
п и л а        со,ел
-----------
  н л ц о
  л л п ь
  ---------
  п о с п о
  с ь о е п
  ---------
    п о ь ь
```

Если бы в этом случае мы остановились на целом частном *(со),* отгадка задуманного слова едва ли была бы возможна.

Что касается слов, пригодных в качестве „ключа“ для подобных ребусов, то выбор их не так беден, как может казаться; кроме прежде указанных, можно использовать слова:

республика,	*пятидневка,*
демократия,	*струбцинка.*

Как далеко может идти изобретательность в этом направлении, показывает следующий пример. Один из читателей прислал мне остроумно составленный арифметический ребус, разгадка которого представляет собой... лозунг для пропаганды идеи межпланетных путешествий. Ребус состоит из трех частей, последовательно развертывающих этот близкий мне лозунг. Вот они:

```
       I                        II                       III
т а й н и к | рык        б у л а т | неп        з а р е в о | трюм
а н н       |-----       н е п     |-----         т р ю м   |-----
-----       | еваи       -----     | пуо          -------   | зт
р к е н                  н н п а                  ю р р ю о
р а т н                  н с ё у                  о и о р е
-------                  -------                  ---------
    в й и                  а е н т                    е о м
    т н е                  а п е о
    -----                  -------
    р е к к                  а б у
    р р и к
    -------
        н й
```

Читатель, который пожелает разгадать этот тройной (и весьма нелегкий) ребус, узнает в итоге, что

```
      I                II              III
 реактивный       планетобус       завоюет мир
```

Предлагаю далее читателю самостоятельно разгадать следующий ряд ребусов:

```
   Ребус № 1              Ребус № 2¹             Ребус № 3

к р и з и с | этап     т е а т р | киль     п е р с и к | бал
э т а п     |-----     к и л ь   |-----     с б п е     |-----
-------     | эет      -------   | рк       -------     | бкп
  з и е и              р т к т р              у л р и
  и е к а              р р о е ь              у п б с
  -------              ---------              -------
  э с с и с              к о и р                е у у к
  э э з к и                                     е п е и
  ---------                                     -------
    э п е е                                       р с р
```

Решения этих ребусов см. в ответах.

---

[1] Хотя в этой задаче ключ состоит из 12 букв и включает в себя повторяющиеся буквы, тем не менее задача вполне разрешима.

ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА В КНИЖНЫХ ШКАФАХ

Особенность десятичной системы счисления остроумно используется даже в такой области, где с первого взгляда этого и ожидать не приходится, — именно, при хранении книг в библиотеке.

Существует такая система распределения книг по номерам, при которой одна и та же книга должна иметь одинаковый номер в любой библиотеке. Это так называемая „десятичная система классификации книг“.

Система эта чрезвычайно удобна и весьма несложна. Сущность ее в том, что каждая отрасль знания обозначается определенным числом и притом так, что цифровой состав этого номера сам говорит о месте данного предмета в общей системе знаний.

Книги, согласно этой международной десятичной классификации, прежде всего разбиваются на 10 обширных классов, обозначенных цифрами от 0 до 9.

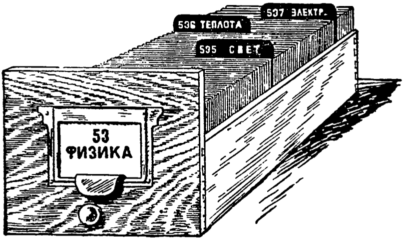
0. Сочинения общего характера.
1. Философия.
2. Религия (у нас — история религий и антирелигиозный отдел).
3. Общественные науки. Право.
4. Филология. Языки.
5. Физико-математические и естественные науки.
6. Прикладные науки (медицина, техника, сельское хозяйство и т. п.).
7. Изящные искусства.
8. Литература.
9. История, география, биографии.

В обозначении номера книги по этой системе первая цифра прямо указывает на ее принадлежность к тому или иному классу из перечисленных выше: каждая книга по философии имеет номер, начинающийся с 1, по математике — с 5, по технике — с 6. И наоборот, если номер начинается, например, с 4, то, не видав книги, мы можем утверждать, что перед нами сочинение из области языкознания.

Далее, каждый из 10 перечисленных классов книг подразделяется на 10 главных отделов, отмеченных цифрами; эти цифры ставят в обозначении нóмера на втором месте. Так, 5-й класс, включающий физико-математические и естественно-научные книги, разделяется на следующие отделы:

50. Общие сочинения по физико-математическим и естественным наукам.
51. Математика.
52. Астрономия. Геодезия.
53. Физика. Механика теоретическая.
54. Химия. Минералогия.
55. Геология.
56. Палеонтология.
57. Биология. Антропология.
58. Ботаника.
59. Зоология.

Сходным образом разбиваются по отделам и остальные классы прикладных наук (6): отдел медицины обозначается цифрой 1 после 6, то-есть числом 61, по сельскому хозяйству — 63, по домоводству — 64, торговле и путям сообщений — 65, химической промышленности и технологии — 66 и т. п. Точно так же в 9-м классе все книги по географии и путешествиям относятся к отделу 91 и т. п.



Ящичек карточного библиотечного каталога, организованного по десятичной системе.

Присоединяя к двум первым цифрам третью, характеризуют содержание книги еще точнее, указывая, к какому разряду данного подотдела она относится. Например, в подотделе математики (51) цифра 1 на третьем месте (511) говорит о том, что книга относится к арифметике; шифр 512 обозначает книги по алгебре; 513 — по геометрии. В отделе физики (53) книги по электричеству имеют шифр 537, по оптике — 535, по теплоте — 536.

В библиотеке, устроенной по десятичной системе, нахождение нужной книги до крайности упрощается. Если вы интересуетесь геометрией, вы прямо идете к шкафам, где шифры начинаются с 5, отыскиваете тот шкаф, где хранятся книги с шифром 51..., и пересматриваете в нем только те полки, где стоят книги с шифром 513,— здесь собраны все книги по геометрии, имеющиеся в данной библиотеке. Как бы обширна ни была библиотека, никогда не может случиться, чтобы какая-либо книга выпала из этой системы обозначений.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗНАКИ И НАЗВАНИЯ У РАЗНЫХ НАРОДОВ

Принято думать, что арифметические знаки до известной степени интернациональны, что они одинаковы у всех народов европейской культуры. Это верно лишь по отношению к большинству знаков, но не ко всем. Знаки + и —, знаки × и : употребляются в одинаковом смысле и немцами, и французами, и англичанами. Но точка как знак умножения применяется не вполне тождественно разными народами. Одни пишут 7 . 8, другие — 7·8, поднимая точку на середину высоты цифры. То же приходится сказать о знаке дробности, то-есть о знаке, отделяющем десятичную дробь от целого числа. Одни пишут, как мы, 4,5; другие — 4.5; третьи — 4˙5, помещая точку выше середины. Англичане и американцы совсем опускают ноль перед десятичной дробью, чего на континенте Европы никто не делает. В американской книге вы встречаете такие обозначения, как .725, или ·725, или даже ,725 — вместо нашего 0,725.

Расчленение числа на классы обозначается также неоднообразно. В одних странах разделяют классы точками (15.000.000), в других — запятыми (15,000,000). У нас привился разумный обычай не помещать между классами никакого знака, а оставлять лишь пробел (15 000 000).

Поучительно проследить за тем, как меняется способ наименования одного и того же числа с переходом от одного языка к другому. Число 18, например, мы называем „восемнадцать“ [1], то-есть произносим сначала единицы (8), потом десятки (10). В такой же последовательности читает это число немец: achtzehn, то-есть 8 — 10. Но француз произносит иначе: 10—8 (dix-huit). Насколько разнообразны у разных народов способы наименования того же числа 18, показывает следующее извлечение из таблицы, составленной одним исследователем:

по-русски	8 — 10
по-литовски	8 сверх 10
по-армянски	10 + 8
по-немецки	8 — 10
по-французски	10 — 8
по-гречески	8 + 10
по-латыни	без 2 20
по-новозеландски	11 + 7
по-валлийски	3 + 5 — 10
по-корядкй	3 — 5 сверх 10

Курьезно наименование для того же числа 18 у одного гренландского племени: „с другой ноги 3“. При всей своей необычности это название, естественно,

---

[1] То-есть восемь на десять.

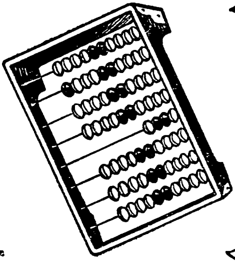
объясняется способом счета по пальцам рук и ног. Раскроем его смысл:

число пальцев обеих рук	10
„ „ одной ноги	5
„ „ другой ноги	3
Итого . . .	18

Сходным образом объясняется караибское наименование числа 18: „все мои руки, 3, моя рука“ (то-есть $10+3+5$).

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КУРЬЕЗ

$$100 = \left\{ \begin{array}{l} 1+2+3+4+5+6+7+8\times 9 \\ 1+2\times 3+4\times 5-6+7+8\times 9 \\ 1+2\times 3+4+5+67+8+9 \\ 1\times 2+34+56+7-8+9 \\ 12+3-4+5+67+8+9 \\ 12-3-4+5-6+7+89 \\ 123+4-5+67-89 \\ 123+45-67+8-9 \\ 123-45-67+89 \\ (1+2-3-4)(5-6-7-8-9) \end{array} \right.$$



ГЛАВА ВТОРАЯ

ПОТОМОК ДРЕВНЕГО АБАКА

ЧЕХОВСКАЯ ГОЛОВОЛОМКА

Припомним ту, в своем роде знаменитую, арифметическую задачу, которая так смутила некогда семиклассника Зиберова из чеховского рассказа „Репетитор“.

„Купец купил 138 арш.[1] черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное 3 руб.?“

С тонким юмором описывает Чехов, как беспомощно трудились над этой задачей и семиклассник-репетитор и его ученик, 12-летний Петя, пока не выручил их Петин отец, Удодов:

„Петя повторяет задачу и тотчас же, ни слова не говоря, начинает делить 540 на 138.

---

[1] **Аршин** — русская мера длины, равная 0,711 *м*.

— Для чего же вы делите? Постойте! Впрочем, так... продолжайте. Остаток получается? Здесь не может быть остатка. Дайте-ка, я разделю!

Зиберов (репетитор. — *Я. П.*) делит, получает 3 с остатком и быстро стирает.

„ Странно... — думает он, ероша волосы и краснея. — Как же она решается? Гм!.. Это задача на неопределенные уравнения, а вовсе не арифметическая“.

Учитель глядит в ответы и видит 75 и 63.

„ Гм!.. странно... Сложить 5 и 3, а потом делить 540 на 8? Так, что ли? Нет, не то“.

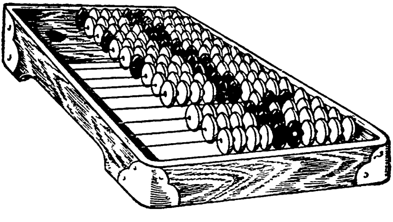
— Решайте же! — говорит он Пете.

— Ну, чего думаешь? Задача-то ведь пустяковая! — говорит Удодов Пете. — Экий ты дурак, братец! Решите уж вы ему, Егор Алексеич.

Егор Алексеич (репетитор. — *Я. П.*) берет в руки грифель и начинает решать. Он заикается, краснеет, бледнеет.

— Эта задача, собственно говоря, алгебраическая, — говорит он. — Ее с иксом и игреком решить можно. Впрочем, можно и так решить. Я вот разделил... понимаете? Теперь вот надо вычесть... понимаете? Или вот что... Решите мне эту задачу к завтраму... Подумайте..

Петя ехидно улыбается. Удодов тоже улыбается. Оба они понимают замешательство учителя. Ученик VII класса еще пуще конфузится, встает и начинает ходить из угла в угол.



Русские конторские счеты.

— И без алгебры решить можно, — говорит Удодов, протягивая руку к счетам и вздыхая. — Вот, извольте видеть...

Он щелкает на счетах, и у него получается 75 и 63, что и нужно было.

— Вот-с... по-нашему, по-неученому".

Эта история с задачей, заставляющая нас смеяться над конфузом злосчастного репетитора, задает нам сама три новые задачи. А именно:

1. Как намеревался репетитор решить задачу алгебраически?

2. Как должен был решить ее Петя?

3. Как решил ее отец Пети на счетах „по-неученому"?

На первые два вопроса, вероятно, без труда ответят если не все, то весьма многие читатели нашей книжки. Третий вопрос не так прост. Но рассмотрим их по порядку.

1. Семиклассник-репетитор готов был решать задачу „с иксом и игреком", будучи уверен, что задача — „собственно говоря, алгебраическая". И он, надо думать, легко справился бы с ней, прибегнув к помощи системы уравнений (только не неопределенных, как ему казалось). Составить два уравнения с двумя неизвестными для данной задачи очень нетрудно; вот они:

$$x + y = 138; \qquad 5x + 3y = 540,$$

где x — число аршин синего, а y — черного сукна.

2. Однако задача легко решается и арифметически. Если бы вам пришлось решать ее, вы начали бы с предположения, что все купленное сукно было синее, тогда за партию в 138 аршин синего сукна пришлось бы уплатить $5 \times 138 = 690$ руб.; это на $690 - 540 = 150$ руб.

больше того, что было заплачено в действительности [1]. Разница в 150 руб. указывает, что в партии имелось и более дешевое, черное сукно — по 3 руб. аршин. Дешевого сукна было столько, что из двух рублей разницы на каждом аршине составилось 150 руб.: очевидно, число аршин черного сукна определится, если разделить 150 на 2. Получаем ответ — 75; вычтя эти 75 аршин из общего числа 138 аршин, узнаем, сколько было синего сукна: 138 — 75 = 63. Так и должен был решать задачу Петя.

3. На очереди третий вопрос: как решил задачу Удодов-старший?

В рассказе говорится очень кратко: „Он щелкает на счетах, и у него получается 75 и 63, что и нужно было“.

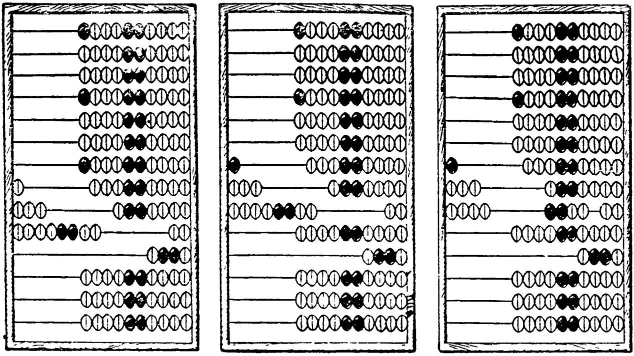
В чем, однако, состояло это „щелканье на счетах“? Каков способ решения задачи с помощью счетов?

Разгадка такова: злополучная задача решается на счетах тем же приемом, что и на бумаге, — теми же арифметическими действиями. Но выполнение их упрощается благодаря преимуществам, которые наши русские счеты предоставляют всякому, умеющему с ними обращаться. Очевидно, „отставной губернский секретарь“ Удодов хорошо умел считать на счетах, потому что их косточки быстро, без помощи алгебры, открыли ему то, чего репетитор-семиклассник добивался узнать „с иксом и игреком“. Проследим же, какие действия должен был проделать на счетах Петин отец.

Прежде всего ему нужно было, как мы знаем, умножить 138 на 5. Для этого он, по правилам действий на счетах, умножил сначала 138 на 10, то-есть просто перенес 138 одним рядом выше, а затем разделил это

---

[1] Можно начинать с предположения, что все купленное сукно было черное. Предоставляем это сделать самому читателю. — *Ред.*



138 **1380** **80 : 2**

Чтобы умножить 138 на 5 при помощи конторских счетов, поступают так: сначала на счетах откладывают 138; затем простым переносом отложенных косточек на один ряд вверх число 138 множится на 10; после этого его делят на 2 (десятки уже разделены), и таким образом получают результат 138 × 5.

число пополам опять-таки на счетах же. Деление начинают снизу: откидывают половину косточек, отложенных на каждой проволоке; если число косточек на данной проволоке нечетное, то выходят из затруднения, „раздробляя“ одну косточку этой проволоки на 10 нижних.

В нашем, например, случае делят 1380 пополам так: на нижней проволоке, где отложено 8 косточек, откидывают 4 косточки (4 десятка), на средней проволоке из 3 косточек откидывают 1, а из оставшихся 2 косточек 1 заменяют мысленно 10 нижними и делят пополам, добавляя 5 десятков к косточкам нижней; на верхней проволоке раздробляют 1 косточку, прибавляя 5 сотен к косточкам средней проволоки. В результате на верхней проволоке совсем не остается косточек; на средней $1 + 5 = 6$ сотен, на нижней $4 + 5 = 9$ десятков. Итого 690 единиц. Выполняется все это быстро, автоматически.

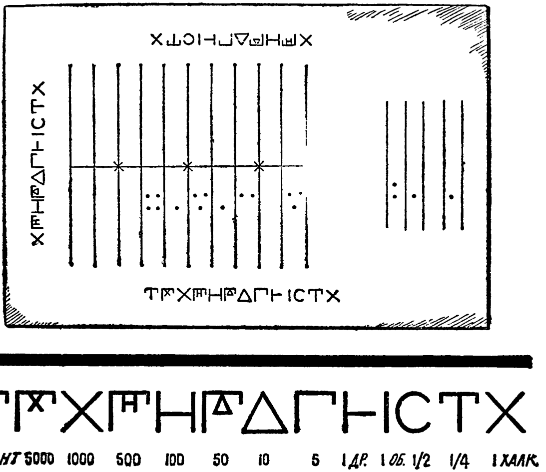
Далее Удодову-старшему нужно было из 690 вычесть 540. Как проделывается это на счетах, всем известно.

Наконец полученную разность, 150, оставалось разделить пополам: Удодов откинул из 5 косточек (десятков) 3, отдав 5 единиц нижнему ряду косточек; потом из 1 косточки на проволоке сотен отдал 5 десятков нижнему ряду: получилось 7 десятков и 5 единиц, то-есть 75.

Все эти простые действия выполняются на счетах, конечно, гораздо скорее, чем тут описано.

СЧЕТЫ

Есть много полезных вещей, которых мы не ценим только потому, что, находясь постоянно у нас под руками, они превратились в слишком обыденный пред-

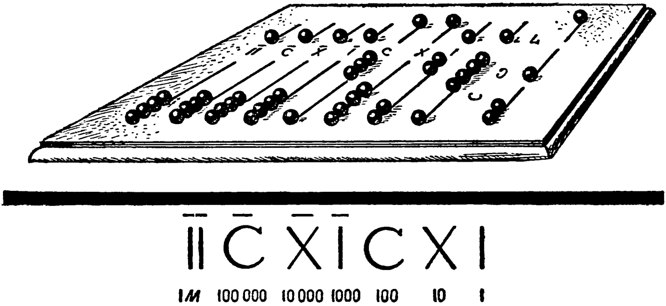


„Саламинская доска“ — древнегреческий абак на мраморной доске размером 150 × 75 *см*, найденный на острове Саламин в 1948 году. Левые колонки служили для отсчета драхм и талантов; правые — для долей драхмы: оболов и халков. На абаке отложено: 4873 драхмы 2 обола 5 халков.

Древнегреческий сборщик податей, считающий на абаке (с античной вазы в Неаполе). Абак не имеет колонок, и камешки кладутся прямо против букв, обозначающих разряды: на нем выложены 1231 драхма 4 обола.

мет домашнего обихода. К числу таких недостаточно ценимых вещей принадлежат и наши конторские счеты — русская народная счетная машина, представляющая собой видоизменение знаменитого абака, или „счетной доски“, наших отдаленных предков.

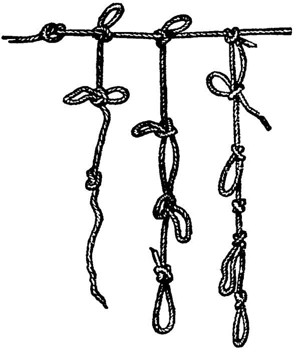
Древние народы — египтяне, греки, римляне — употребляли при вычислениях счетный прибор абак. Это была доска (стол), разграфленная на полосы, по которым передвигали особые шашки,



Римский абак представлял собой бронзовую доску с пазами, в которых ходили круглые бронзовые пуговки. Пуговки нижнего ряда (по четыре в каждом пазу), сдвинутые к середине, означали единицы своего разряда; сдвинутые пуговки верхнего ряда (по одной в каждом пазу) означали пятки; пуговки в двух крайних пазах справа служили для отсчета дробей: в левом пазу откладывались $^{1}/_{12}$; в правом — $^{1}/_{24}$; $^{1}/_{48}$; $^{1}/_{72}$. На абаке отложено 852 $^{4}/_{12}$ $^{1}/_{24}$.

игравшие роль косточек наших счетов. Такой вид имел греческий абак. Абак римский имел форму медной доски с желобами (прорезами), в которых передвигались пуговки.

Родствен абаку перуанский „квипос“ — ряд ремней или бечевок с завязанными на них узлами. Этот счетный прибор получил особенное распространение среди первых обитателей Южной Америки, но без сомнения был в употреблении также и в Европе (см. далее: „Отголоски старины“).



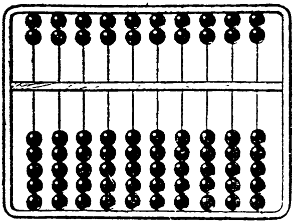
Счетный прибор перуанцев — „квипос“. Отголоском пользования подобными веревочными приборами является обычай сегодняшнего дня — завязывать для памяти узелок на носовом платке.

В средние века, вплоть до XVI века, подобные приспособления были широко распространены в Европе. Но теперь видоизмененный абак — счеты — сохранился только, кажется, у нас да на азиатском Востоке — в Китае (семикосточковые счеты — „суань-пань“[1]) и Японии (тоже семикосточковые счеты — „соробан“). Каждый грамотный человек умеет там выполнять на таких счетах четыре арифметических действия.

Между тем Запад почти не знает счетов — вы не найдете их ни в одном магазине Европы, и только в начальных школах имеются огромные счеты — наглядное классное пособие при обучении нумерации.

---

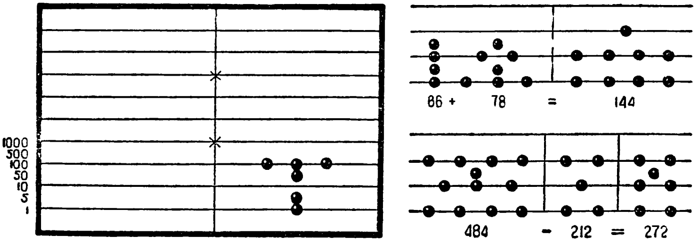
[1] Суань-пань изготовляется всевозможных размеров, до самых миниатюрных (у меня имеется китайский суань-пань — брелок в 17 *мм* длины и 8 *мм* ширины). Употребляются также шестикосточковые счеты: 5 косточек по одну сторону планки, одна — по другую. (На имеющемся у меня образчике таких счетов 21 ряд косточек.)



Семикосточковые счеты. В Китае они называются „суаньпань“, в Японии — „соробан“.

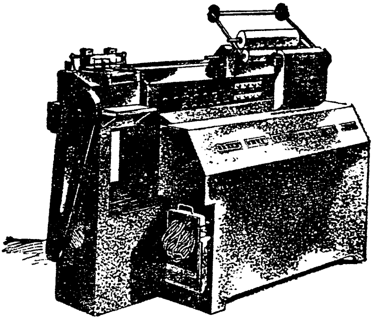
Японцы ценят свои счеты высоко. Вот как отзывается о соробане один японский ученый: „Несмотря на свою древность, соробан превосходит все современные счетные приборы легкостью обращения с ним, простотою устройства и дешевизною“.

Мы тоже вправе были бы гордиться нашими конторскими счетами, так как при изумительной простоте устройства они по достигаемым на них результатам могут соперничать в некоторых отношениях даже со сложными, дорогостоящими счетными машинами. В умелых руках этот нехитрый прибор делает порой настоящие чудеса. Один специалист, заведовавший до революции крупной русской фирмой по продаже счетных



Предок русских конторских счетов — древнерусский абак „счет костьми“, известный по рукописям XVI — XVII веков. На доске или на столе чертилась мелом сетка из 6—9 горизонтальных линий и нескольких вертикальных. Счет производился при помощи сливовых косточек или медных жетонов — „пенязей“; они раскладывались на горизонтальных линиях и в промежутках между ними; сейчас на абаке положено число 356. Сбоку показано сложение (вверху) и вычитание „счета костьми“ (внизу).

машин, рассказывал мне, что ему не раз приходилось изумлять русскими счетами иностранцев, привозивших в его контору образцы сложных счетных механизмов. Он устраивал состязания между двумя счетчиками, из которых один работал на дорогой заграничной „аддиционной“ машине (то-есть машине для сложения), другой же пользовался обыкновенными счетами. И случалось, что последний — правда, большой мастер своего дела — брал верх над обладателем заморской диковинки в быстроте и точности вычислений. Бывало и так, что иностранец, пораженный быстротой работы на счетах, сразу же сдавался и укладывал свою машину в чемодан, не надеясь продать у нас ни одного экземпляра.



Современный советский счетно-записывающий автомат — табулятор „Т-м“. Он сам считает числа и ведет запись со скоростью до 45 000 операций в час.

— К чему вам дорогие счетные машины, если вы так искусно считаете при помощи ваших дешевых счетов! — говорили нередко представители иностранных фирм.

Правда, на русских счетах нельзя производить всех тех действий, которые выполняются машинами. Нынешние счетные машины, конечно, оставляют далеко позади наши счеты. Но во многом — например, в сложении и вычитании — счеты могут соперничать со сложными приборами. Впрочем, в искусных руках умножение и деление также значительно ускоряются на счетах, если знать приемы выполнения этих действий.

Познакомимся с некоторыми из них.

УМНОЖЕНИЕ НА СЧЕТАХ

Вот несколько приемов, пользуясь которыми всякий умеющий быстро складывать на счетах сможет проворно выполнять встречающиеся на практике примеры умножения.

Умножение на 2 и на 3 заменяется двукратным и троекратным сложением.

При умножении на 4 умножают сначала на 2 и складывают этот результат с самим собою.

Умножение числа на 5 выполняется на счетах так: переносят все число одной проволокой выше, то-есть умножают его на 10, а затем делят это 10-кратное число пополам (как делить на 2 с помощью счетов мы уже объяснили выше).

Вместо умножения на 6 умножают на 5 и прибавляют умножаемое.

Вместо умножения на 7 множат на 10 и отнимают умножаемое 3 раза.

Умножение на 8 заменяют умножением на (10—2).

Точно так же множат на 9: заменяют умножением на (10—1).

При умножении на 10 переносят, как мы уже сказали, все число одной проволокой выше.

Читатель, вероятно, уже сам сообразит, как надо поступать при умножении на числа больше 10 и какого рода замены тут окажутся наиболее удобными. Множитель 11 надо, конечно, заменить (10+1). Множитель 12 заменяют (10+2) или, практически, (2+10), то-есть сначала откладывают удвоенное число, а затем прибавляют удесятеренное. Множитель 13 заменяется (10+3) и т. д.

Рассмотрим несколько особых случаев для множителей первой сотни:

$20 = 10 \times 2$

$22 = 11 \times 2$

$25 = (100:2) : 2$

$26 = 25 + 1$

$27 = 30 - 3$

$32 = 22 + 10$

$42 = 22 + 20$

$43 = 33 + 10$

$45 = 50 - 5$

$63 = 33 + 30$ и т. д.

Легко видеть, между прочим, что с помощью счетов очень удобно умножать на такие числа, как на 22, 33, 44, 55 и т. п. Поэтому надо стремиться при разбивке множителей пользоваться подобными числами с одинаковыми цифрами.

К сходным приемам прибегают и при умножении на числа, большие 100. Если подобные искусственные приемы утомительны, мы всегда, конечно, можем умножить с помощью счетов по общему правилу, умножая каждую цифру множителя и записывая частные произведения, — это все же дает некоторое сокращение времени.

ДЕЛЕНИЕ НА СЧЕТАХ

Выполнять с помощью конторских счетов деление гораздо труднее, чем умножение; для этого нужно запомнить целый ряд особых приемов, подчас довольно замысловатых. Здесь укажу лишь, ради примера, удобные приемы деления с помощью счетов на числа первого десятка (кроме числа 7, способ деления на которое чересчур сложен).

Как делить на 2, мы уже знаем (стр. 28) — способ этот очень прост.

Гораздо сложнее прием деления на 3: он состоит в замене деления умножением на бесконечную периодическую дробь 0,333... (известно, что $0{,}333... = {}^{1}/_{3}$). Умножать с помощью счетов на 3 мы умеем; уменьшать в 10 раз тоже несложно: надо лишь переносить делимое одной проволокой ниже. После недолгого упражнения этот прием деления на 3, на первый взгляд длинноватый, оказывается довольно удобным на практике.

Деление на 4, конечно, заменяется двукратным делением на 2.

Еще проще деление на 5: его заменяют делением на 10 и удвоением результата.

На 6 делят в два приема: сначала делят на 2, потом полученное делят на 3.

На 8 делят в три приема: сначала на 2, потом полученное вновь на 2 и затем еще раз на 2.

Очень интересен прием деления на 9. Он основан на том, что $^1/_9=0{,}1111...$ Отсюда ясно, что вместо деления на 9 можно последовательно складывать 0,1 делимого $+$ 0,01 его и т. д.[1]

Всего проще, как видим, делить на 2, 10 и 5 и, конечно, на такие кратные им числа, как 4, 8, 16, 20, 25, 40, 50, 75, 80, 100. Эти случаи деления не представляют трудности и для малоопытного счетчика.

ОТГОЛОСКИ СТАРИНЫ

С отдаленными предками наших конторских счетов связаны некоторые пережитки старины в языке и обычаях. Мало кто подозревает, например, что, собственно, мы делаем, завязывая иногда „для памяти“ узелок на носовом платке. Мы повторяем то, что некогда с большим смыслом делали наши предки, „записывая“ таким образом итог счета на шнурках. Веревка с узлами

---

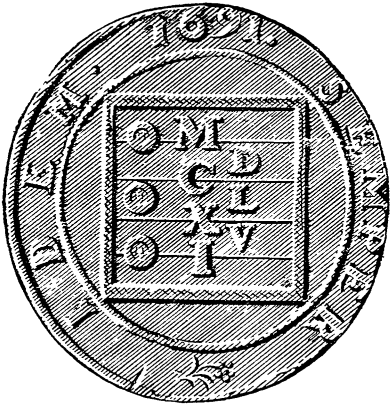
[1] Этот прием полезен и для устного деления на 9.

представляла собой некогда счетный прибор, в принципе аналогичный нашим счетам и, без сомнения, связанный с ними общностью происхождения. Это — „веревочный абак“. Однократно завязанный узел на веревке означал 10, двукратно — 100, троекратно — 1000 и т. д.


Немецкие купцы, занятые счетом на счетных досках.
(Гравюра 1518 года.)

С абаком же связаны и такие распространенные теперь слова, как „банк“ и „чек“. „Банк“ по-немецки означает „скамья“. Что же общего между финансовым учреждением — „банком“ в современном смысле слова — и скамьей? Оказывается, здесь далеко не простое совпадение названий. Абак в форме скамьи был широко распространен в торговых кругах Германии в XV — XVI веках; каждая меняльная лавка или банковская контора прежде всего характеризовалась присутствием „счетной скамьи“, — естественно, что скамья стала синонимом банка.

Более косвенное отношение к абаку имеет слово „чек“. Оно английского происхождения и производится от глагола „чекер“ (checker) — графить; „чекеред“ (графленый) называли разграфленную в форме абака кожаную салфетку, которую в XVI—XVII веках английские коммерсанты носили с собой в свернутом виде и, в случае надобности произвести подсчет, развертывали на столе. Бланки для расчетов графились по образцу этих свертывающихся абаков, и неудивительно, что на них перенесено было в сокращенном виде самое название этих счетных приборов.



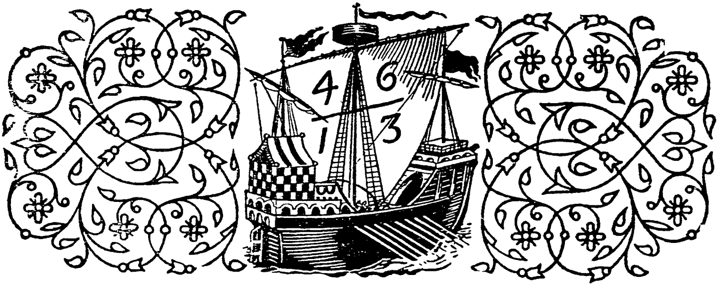
Счетный жетон — „пенязь“ — немецкой работы 1691 года с изображением счетной доски — абака.

Любопытно, откуда произошло выражение „остаться на бобах“. Оно относится к тому времени, когда все денежные расчеты производились на абаке, на счетном столе или скамье, с помощью бобов, заменявших косточки наших счетов. „Один считает на камешках, другой — на бобах“, — читаем у Кампанеллы[1] в „Городе Солнца“ (1602). Человек, проигравший свои деньги, оставался с одними бобами, выражавшими сумму его проигрыша, — отсюда и соответствующий оборот речи.

---

[1] Кампанелла Томмазо (1568—1639) — итальянский мыслитель, один из ранних представителей утопического коммунизма.

* * *



ГЛАВА ТРЕТЬЯ

НЕМНОГО ИСТОРИИ

„ТРУДНОЕ ДЕЛО — ДЕЛЕНИЕ“

Зажигая привычным движением спичку, мы иной раз еще задумываемся над тем, скольких трудов стоило добывание огня нашим предкам, даже не очень отдаленным.

Но мало кто подозревает, что нынешние способы выполнения арифметических действий тоже не всегда были так просты и удобны, так прямо и быстро приводили к результату.

Предки наши пользовались гораздо более громоздкими и медленными приемами. И если бы школьник XX века мог перенестись за четыре, за три века назад, он поразил бы наших предков быстротой и безошибочностью своих арифметических выкладок. Молва о нем облетела бы окрестные школы и монастыри, затмив славу искуснейших счетчиков той эпохи, и со всех сторон приезжали бы учиться у нового, великого мастера счетного дела.

Особенно сложны и трудны были в старину действия умножения и деления — последнее всего больше. „Умноженье — мое мученье, а с делением — беда“, — говорили в старину. Тогда не существовало еще, как теперь, одного выработанного практикой приема для каждого действия. Напротив, в ходу была одновременно чуть не дюжина различных способов умножения и деления — приемы один другого запутаннее, твердо запомнить которые не в силах был человек средних способностей. Каждый учитель счетного дела держался своего излюбленного приема, каждый „магистр деления“ (были такие специалисты) восхвалял собственный способ выполнения этого действия. И все эти приемы умножения — „шахматами, или органчиком“, „загибанием“, „по частям, или в разрыв“, „крестиком“, „решеткой“, „задом наперед“, „ромбом“, „треугольником“, „кубком“, или „чашей“, „алмазом“ и проч., а также все способы деления, носившие не менее затейливые наименования, соперничали друг с другом в громоздкости и сложности. Усваивались они с большим трудом и лишь после продолжительной практики. Признавалось даже, что для овладения искусством быстрого и безошибочного умножения и деления многозначных чисел нужно особое природное дарование, исключительные способности; рядовым людям премудрость эта недоступна. „Трудное дело — деление“ (dura cosa e la partita) — гласила старинная итальянская поговорка. Оно и в самом деле было трудно, если принять во внимание утомительные методы, какими выполнялось тогда это действие. Нужды нет, что способы эти носили подчас довольно игривые названия; под веселым названием скрывался длиннейший ряд запутанных манипуляций. В XVI веке кратчайшим и удобнейшим способом считалось, например, деление „лодкой или галерой“.

Знаменитый итальянский математик того времени — Николай Тарталья (XVI век) в своем обширном учебнике арифметики писал об этом способе следующее: „Второй способ деления называется в Венеции[1] лодкой или галерой вследствие некоторого сходства фигуры, получающейся при этом, потому что при делении некоторых родов чисел составляется фигура, похожая на лодку, а в других — на галеру, которая в самом деле красиво выглядит; галера получается иной раз хорошо отделанная и снабженная всеми принадлежностями — выкладывается из чисел так, что она действительно представляется в виде галеры с кормою и носом, мачтою, парусами и веслами“.

Читается это очень весело: так и настраиваешься скользить по числовому морю на парусах арифметической галеры. Но, хотя старинный математик и рекомендует этот способ как „самый изящный, самый легкий, самый верный, самый употребительный и самый общий из существующих, пригодный для деления всех возможных чисел“, я не решаюсь его изложить здесь из опасения, что даже терпеливый читатель закроет книгу в этом скучном месте и не станет читать дальше.

Между тем этот утомительный способ действительно был самым лучшим в ту эпоху. У нас он употреблялся до середины XVIII века: в „Арифметике“ Леонтия

---

[1] Венеция и некоторые другие государства Италии в XIV—XVI веках вели обширную морскую торговлю, и потому в этих странах приемы счета были, ради коммерческих надобностей, разработаны раньше, чем в других. Лучшие труды по арифметике появились в Венеции. Многие итальянские термины коммерческой арифметики сохранились еще в настоящее время.

Магницкого[1] он описан в числе шести предлагаемых там способов (из которых ни один не похож на современный) и особенно рекомендуется автором; на протяжении своей объемистой книги — 640 страниц большого формата — Магницкий пользуется исключительно „способом галеры“, не употребляя, впрочем, этого наименования.

В заключение покажем читателю эту числовую „галеру“, воспользовавшись примером из книги Тартальи:

```
                             4 | 6
                    88       1 | 3       08
                  0999        09          199
                  1660        19         0860
                 88876       0876        08877
                099994800000019948000000199994
                166666000000086660000000866666
Делимое       — 888888000000088880000000888888 (88 — частное)
Делитель [2] —   99999000000009990000000099999
                   99999000000009990000000099
```

МУДРЫЙ ОБЫЧАЙ СТАРИНЫ

Добравшись после утомительных трудов до желанного конца арифметического действия, предки наши считали необходимым непременно проверить этот в поте лица добытый итог. Громоздкие приемы вызывали недо-

---

[1] Магницкий Л. Ф. (1669—1739) — русский математик, составил первый русский учебник математики, охватывающий все ее отделы, известные в ту эпоху (включая и сведения из мореходной астрономии). Это одна из тех двух книг, которые Ломоносов назвал „вратами своей учености“. Подробное заглавие ее таково:

„Арифметика, сиречь наука числительная, повелением царя Петра Алексеевича в великом граде Москве типографским тиснением ради обучения мудролюбивых российских отроков и всякого чина и возраста людей на свет произведена в лето от рождества бога слова 1703“.

[2] Последние две девятки приписаны к делителю в процессе деления.

верие к их результатам. На длинном, извилистом пути легче заблудиться, чем на прямой дороге современных приемов. Отсюда естественно возник старинный обычай проверять каждое выполняемое арифметическое действие — похвальное правило, которому не мешало бы и нам следовать.

Любимым приемом проверки был так называемый „способ девятки“. Этот изящный прием нередко описывается и в современных арифметических учебниках, особенно иностранных.

Проверка девяткой основана на „правиле остатков“, гласящем: остаток от деления суммы на какое-либо число равен сумме остатков от деления каждого слагаемого на то же число. Точно так же остаток произведения равен произведению остатков множителей. С другой стороны, известно также[1], что при делении числа на 9 получается тот же остаток, что и при делении на 9 суммы цифр этого числа; например, 758 при делении на 9 дает остаток 2, и то же получается в остатке от деления (7 + 5 + 8) на 9. Сопоставив оба указанных свойства, мы и приходим к приему проверки девяткой, то-есть с делением на 9. Покажем на примере.

Пусть требуется проверить правильность сложения следующего столбца:

$$\begin{array}{rcr}
38\,932 & \ldots\ldots & 7 \\
1\,096 & \ldots\ldots & 7 \\
+\,4\,710\,043 & \ldots\ldots & 1 \\
\underline{589\,106} & \ldots\ldots & \underline{2} \\
5\,339\,177 & \ldots\ldots & 8
\end{array}$$

Составляем в уме сумму цифр каждого слагаемого, причем в получающихся попутно двузначных числах также складываем цифры (делается это в самом процессе сложения цифр), пока, в конечном результате, не

---

[1] Выясняется попутно при выводе признака делимости на 9.

получим однозначного числа. Результаты эти (остатки от деления на 9) записываем, как показано на примере, рядом с соответствующим слагаемым. Складываем все остатки $(7+7+1+2=17;\ 1+7=8)$, получаем 8. Такова же должна быть сумма цифр итога (5339177), если действие выполнено верно: $5+3+3+9+1+$ $+7+7$ после всех упрощений равно 8.

Проверка вычитания выполняется точно так же, если принять уменьшаемое за сумму, а вычитаемое и разность — за слагаемые. Например:

$$\begin{array}{rcr} 6913 & \ldots\ldots & 1 \\ -\;2587 & \ldots\ldots & 4 \\ \hline 4326 & \ldots\ldots & 6 \end{array}$$

$$4+6=10;\quad 1+0=1.$$

Особенно удобен этот прием в применении к проверке действия умножения, как видно из следующего примера:

$$\begin{array}{rcr} 8713 & \ldots\ldots & 1 \\ \times\;\;264 & \ldots\ldots & \times\;3 \\ \cline{1-1}\cline{3-3} 34852 & & 3 \\ 52278 & & \\ 17426 & & \\ \cline{1-1} 2300232 & \ldots\ldots\ldots & 3 \end{array}$$

Если при такой проверке умножения обнаружена будет ошибочность результата, то, чтобы определить, где именно кроется ошибка, можно проверить способом девятки каждое частное произведение отдельно; а если здесь ошибки не окажется, остается проверить лишь сложение частных произведений.

Как по этому способу проверять деление? Если у нас случай деления без остатка, то делимое рассматривается как произведение делителя на частное. В случае же деления с остатком пользуются тем, что делимое = делителю × частное + остаток.

Например:

$$\underbrace{16\ 201\ 387}_{1} : \underbrace{4457}_{2} = \underbrace{3635}_{8};\quad \text{остаток}\quad \underbrace{192}_{3}$$

сумма цифр:

$$2 \times 8 + 3 = 19;\ 1 + 9 = 10;\ 1 + 0 = 1.$$

Привожу из „Арифметики“ Магницкого предлагаемое там для проверки девяткой удобное расположение:

Для умножения:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 365 \\ 24 \end{array} \\ \hline 1460 \\ 730 \\ \hline 8760 \end{array} \qquad \text{„Сие } 3 \begin{array}{c} 5 \\ \begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array} \\ 6 \\ \hline 30 \end{array} 3 \text{ сему согласно, убо добре есть“}$$

Для деления:

$$\begin{array}{lc} & \text{Частного} \\ & 8 \\ \text{Делимого } 1 & \begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array} \ 1 \text{ „Согласно добре делил“} \\ \text{Делителя} & 2 \\ \hline & 16 \\ \text{Остатка} & 3 \\ \hline \text{Всех} & 1 \end{array}$$

Подобная проверка действий, без сомнения, не оставляет желать лучшей в смысле быстроты и удобства. Нельзя сказать того же о ее надежности: ошибка может и ускользнуть от нее. Действительно, одну и ту же сумму цифр могут иметь разные числа; не только перестановка цифр, но, иной раз, даже и замена одних другими остаются при такой проверке необнаруженными. Укрываются от контроля также лишние девятки и нули, потому что не влияют на сумму цифр. Всецело полагаться поэтому на такой прием проверки было бы неосмотрительно. Предки наши сознавали это и не ограничивались одной лишь проверкой с помощью девятки, но производили еще дополнительную проверку — чаще всего с помощью семерки. Этот прием основан на том же „правиле остатков“, но не так удобен, как способ девятки, потому что деление на 7 приходится выполнять полностью, чтобы найти остатки (а при этом легко возможны ошибки в действиях самой проверки).

Две проверки — девяткой и семеркой — являются уже гораздо более надежным контролем: что ускользнет от одной, будет уловлено другой. Ошибка не обнаружится лишь в том случае, если разность истинного и полученного результатов кратная числу $7 \times 9 = 63$. Так как подобная случайность все же возможна, то и двойная проверка не дает полной уверенности в правильности результата.

Впрочем, для обычных вычислений, где ошибаются чаще всего на одну или две единицы, можно ограничиться только проверкой девяткой. Дополнительная проверка семеркой чересчур обременительна. Только тот контроль хорош, который не мешает работе.

Если тем не менее, выполняя ответственное вычисление, вы пожелаете для надежности произвести двойную проверку, то вместо делителя 7 лучше пользоваться делителем 11. При этом дело можно значительно упростить, применив следующий удобный признак делимости на 11: число разбивают на грани справа налево, по две цифры в каждой (самая левая грань может заключать и одну цифру); грани складывают, и полученная сумма будет „равноостаточна“ с испытуемым числом по делителю 11: сумма граней дает при делении на 11 тот же остаток, что и испытуемое число.

Поясним сказанное примером. Требуется найти остаток от деления 24 716 на 11. Разбиваем число на грани и складываем их:

$$2 + 47 + 16 = 65.$$

Так как 65 при делении на 11 дает в остатке 10, то и число 24 716 дает при делении на 11 тот же остаток.

Я предлагаю этот способ потому, что он одновременно дает и число, равноостаточное с испытуемым также по делителю 9. Таким образом, мы имеем возможность удобно произвести проверку сразу посредством двух делителей : 9 и 11. От такой проверки может ускользнуть только ошибка, кратная 99, то-есть весьма маловероятная.

ХОРОШО ЛИ МЫ МНОЖИМ?

Старинные способы умножения были неуклюжи и неудобны, но так ли хорош наш нынешний способ, чтобы в нем невозможны были уже никакие дальнейшие улучшения? Нет, и наш способ не является совершенным; можно придумать еще более быстрые или еще более надежные. Из нескольких предложенных улучшений укажем пока только одно, увеличивающее не быстроту выполнения действия, а его надежность. Оно состоит в том, что при многозначном множителе начинают с умножения не на последнюю, а на первую цифру множителя. Выполненное на стр. 44 умножение 8713 × 264 примет при этом такой вид:

$$\begin{array}{r} \times\; 8713 \\ 264 \\ \hline 17426 \\ 52278 \\ 34852 \\ \hline 2300232 \end{array}$$

Как видим, последнюю цифру каждого частного произведения подписывают под той цифрой множителя, на которую умножают.

Преимущество подобного расположения в том, что цифры частных произведений, от которых зависят первые, наиболее ответственные цифры результата, получаются в начале действия, когда внимание еще не утомлено и, следовательно, вероятность сделать ошибку меньшая. (Кроме того, способ этот упрощает применение так называемого „сокращенного“ умножения о котором здесь мы распространяться не можем.)

„РУССКИЙ“ СПОСОБ УМНОЖЕНИЯ

Вы не можете выполнить умножение многозначных чисел, хотя бы даже двузначных, если не помните наизусть всех результатов умножения однозначных чисел, то-есть того, что называется таблицей умножения. В старинной „Арифметике“ Магницкого, о которой мы уже упоминали, необходимость твердого знания таблицы умножения воспета в таких — чуждых для современного слуха — стихах:

Аще кто не твердит
таблицы и гордит,
Не может познати
числом что множати
И во всей науки,
несвобод от муки,
Колико не учит,
туне ся удручит
И в пользу не будет,
аще ю забудет.

Автор этих стихов, очевидно, не знал или упустил из виду, что существует способ перемножать числа и без знания таблицы умножения. Способ этот, не похсжий на наши школьные приемы, употребителен в обиходе великорусских крестьян и унаследован ими от глубокой древности. Сущность его в том, что умножение любых двух чисел сводится к ряду последовательных делений одного числа пополам при одновременном удвоении другого числа.

Вот пример:

$$\begin{array}{r@{\times}l} 32 & 13 \\ 16 & 26 \\ 8 & 52 \\ 4 & 104 \\ 2 & 208 \\ 1 & 416 \end{array}$$

Деление пополам продолжают до тех пор, пока в частном не получится 1, параллельно удваивая другое число. Последнее удвоенное число и дает искомый результат. Нетрудно понять, на чем этот способ основан: произведение не изменяется, если один множитель уменьшить вдвое, а другой вдвое же увеличить. Ясно поэтому, что в результате многократного повторения этой операции получается искомое произведение:

$$32 \times 13 = 1 \times 416.$$

Однако как поступить, если при этом приходится делить пополам число нечетное?

Народный способ легко выводит из этого затруднения. Надо — гласит правило — в случае нечетного числа откинуть единицу и делить остаток пополам; но зато к последнему числу правого столбца нужно будет прибавить все те числа этого столбца, которые стоят против нечетных чисел левого столбца; сумма и будет искомым произведением. Практически это делают так, что все строки с четными левыми числами зачеркивают; остаются только те, которые содержат налево нечетное число. Приведем пример (звездочки указывают, что данную строку надо зачеркнуть):

$$\begin{array}{r@{\times}l} 19 & 17 \\ 9 & 34 \\ 4 & 68^{*} \\ 2 & 136^{*} \\ 1 & 272 \end{array}$$

Сложив незачеркнутые числа, получаем вполне правильный результат:

$$17+34+272=323.$$

На чем основан этот прием?

Обоснованность приема станет ясна, если принять во внимание, что

$$19\times 17=(18+1)\ 17=18\times 17+17,$$
$$9\times 34=\ (8+1)\ 34=\ 8\times 34+34 \text{ и т. д.}$$

Ясно, что числа 17, 34 и т. п., утрачиваемые при делении нечетного числа пополам, необходимо прибавить к результату последнего умножения, чтобы получить произведение.

ИЗ СТРАНЫ ПИРАМИД

Весьма вероятно, что описанный способ дошел до нас из глубочайшей древности и из отдаленной страны — из Египта. Мы мало знаем, как производили арифметические действия обитатели древней Страны пирамид. Но сохранился любопытный документ — папирус, на котором записаны арифметические упражнения ученика одной из землемерных школ древнего Египта, — это так называемый „папирус Ринда“, относящийся ко времени между 2000 и 1700 годом до нашей эры[1] и представляющий собой копию еще более древней рукописи, переписанную неким Аамесом. Писец[2] Аамес, найдя „ученическую тетрадку“ этой отдаленнейшей

---

[1] Папирус, заключенный в металлический футляр, был разыскан английским египтологом Генри Риндом. В развернутом виде имеет 20 *м* длины, при 30 *см* ширины. Хранится в Британском музее, в Лондоне.

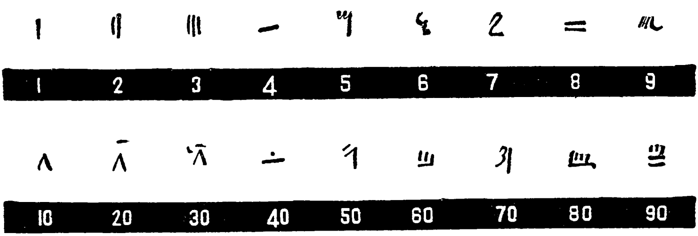
[2] Звание „писец“ принадлежало третьему классу египетских жрецов; в заведывании их находилось „все относившееся к строительной части храма и к его земельной собственности“. Математические, астрономические и географические знания составляли их главную специальность (В. Бобынин).

эпохи, тщательно переписал все арифметические упражнения будущего землемера — вместе с их ошибками и исправлениями учителя — и дал своему списку торжественное заглавие, которое дошло до нас в следующем неполном виде:

> „Наставление, как достигнуть знания всех темных вещей... всех тайн, сокрытых в вещах.
>
> Составлено при царе Верхнего и Нижнего Египта Ра-а-усе, дающем жизнь, по образцу древних сочинений времен царя Ра-ен-мата писцом Аамесом“.

Египетское изображение писца. Писцы в древнем Египте принадлежали к третьему классу жрецов; они заведовали землями и строительной частью храма. Обучение писца наукам, требующимся для этой должности, продолжалось 12 лет.

В этом интересном документе, насчитывающем за собой около сорока веков и свидетельствующем о еще более глубокой древности, мы находим четыре примера умножения, выполненные по способу, живо напоминающему наш русский народный способ. Вот эти примеры (точки впереди чисел обозначают число единиц множи-



Египетские цифры иератического письма из папируса Ринда.

теля; знаком + мы отметили числа, подлежащие сложению):

(8×8)
. 8
. . 16
. . . . 32
: : : : 64

(9×9)
. 9 +
. . 18
. . . . 36
: : : : 72 +
Итог . . 81

(8×365)
. 365
. . 730
. . . . 1460
: : : : 2920

(7×2801)
. 2801 +
. . 5602 +
. . . . 11204 +
Итог . . 19607

Вы видите из этих примеров, что еще за тысячелетия до нас египтяне пользовались приемом умножения, довольно сходным с нашим крестьянским, и что неведомыми путями он как бы перекочевал из древней Страны пирамид в современную эпоху. Если бы обитателю земли фараонов предложили перемножить, например, 19×17, он произвел бы это действие следующим образом: написал бы ряд последовательных удвоений числа 17

1	17 +
2	34 +
4	68
8	136
16	272 +

и затем сложил бы те числа, которые отмечены здесь знаком +, то-есть $17 + 34 + 272$. Он получил бы, конечно, вполне правильный результат: $17 + (2 \times 17) + (16 \times 17) = 19 \times 17$. Легко видеть, что подобный прием по существу весьма близок к нашему крестьянскому (замена умножения рядом последовательных удвоений).

Трудно сказать, у одних ли наших крестьян был в ходу такой древний способ умножения; английские авторы называют его именно „русским крестьянским способом“; в Германии крестьяне кое-где хотя и пользуются им, но также называют его „русским“.

Чрезвычайно интересно было бы получить от читателей сведения о том, применяется ли сейчас где-нибудь этот древний способ умножения, имеющий за собой такое долгое и оригинальное прошлое. Следовало бы вообще с бóльшим вниманием относиться к народной математике: вникать в употребляемые народом приемы счета и измерений, собирать и записывать эти памятники народного математического творчества, дошедшие до нашего времени из глубин седой старины.

На это давно указывал историк математики В. В. Бобынин[1], предложивший даже краткую программу собирания памятников народной математики. Не лишним будет, пожалуй, привести здесь составленный им перечень того, что именно следует собирать и записывать: 1) счисление и счет, 2) приемы меры и веса, 3) геометрические сведения и их выражение в постройках, нарядах и украшениях, 4) способы межевания, 5) народные задачи, 6) пословицы, загадки и вообще произведения народной словесности, имеющие отношение к математическим знаниям, 7) памятники древней народной математики, находящиеся в рукописях, музеях, коллекциях и т. д. или находимые при раскопках курганов, могил, городищ и проч.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ

$$91+\frac{5823}{647}=100;\quad 94+\frac{1578}{263}=100;\quad 96+\frac{1428}{357}=100$$

---

[1] Бобынин В. В. (1849—1919) — первый историк математики в России.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

НЕДЕСЯТИЧНЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Эту главу позволю себе начать с задачи, которую я придумал когда-то для читателей старого распространенного журнала[1] в качестве „задачи на премию“.

Вот она:

„Загадочная автобиография

В бумагах одного чудака-математика найдена была его автобиография. Она начиналась следующими строками:

„*Я окончил курс университета 44 лет от роду. Спустя год, 100-летним молодым человеком, я же-*

---

[1] „Природа и люди“ (потом она была перепечатана в сборнике Е. И. Игнатьева „В царстве смекалки“).

нился на 34-летней девушке. Незначительная разница в возрасте — всего 11 лет — способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного лет у меня была уже и маленькая семья из 10 детей. Жалованья я получал в месяц всего 200 руб., из которых $^1/_{10}$ приходилось отдавать сестре, так что мы с детьми жили на 130 руб. в месяц“ и т. д.

Чем объяснить странные противоречия в числах этого отрывка?“

Решение задачи подсказывается названием этой главы: недесятичная система счисления — вот единственная причина кажущейся противоречивости приведенных чисел. Напав на эту мысль, нетрудно догадаться, в какой именно системе счисления изображены числа чудаком-математиком. Секрет выдается фразой: „спустя год (после 44 лет), 100-летним молодым челоееком...“ Если от прибавления одной единицы число 44 преображается в 100, то, значит, цифра 4 — наибольшая в этой системе (как 9 — в десятичной), а следовательно, основанием системы является 5. Чудаку-математику пришла фантазия написать все числа своей биографии по пятеричной системе счисления, то-есть по такой, в которой единица высшего разряда не в 10, а в 5 раз больше единицы низшего; на первом справа месте стоят в ней простые единицы (не свыше четырех), на втором — не десятки, а пятерки; на третьем — не сотни, а „двадцатипятерки“ и т. д. Поэтому число, изображенное в тексте записки „44“, означает не $4 \times 10 + 4$, как в десятичной системе, а $4 \times 5 + 4$, то-есть 24.

Точно так же число „100“ в автобиографии означает одну единицу третьего разряда в пятеричной системе, то-есть 25. Остальные числа записки соответственно означают:

$$\begin{aligned}
\text{„34“} &= 3 \times 5 + 4 = 19,\\
\text{„11“} &= 5 + 1 \quad = 6,\\
\text{„200“} &= 2 \times 25 \quad = 50,\\
\text{„10“} &= \qquad\qquad 5,\\
\text{„}^1/_{10}\text{“} &= \qquad\qquad ^1/_5,\\
\text{„130“} &= 25 + 3 \times 5 = 40.
\end{aligned}$$

Восстановив истинный смысл чисел записки, мы видим, что в ней никаких противоречий нет:

Я окончил курс университета 24 лет от роду. Спустя год, 25-летним молодым человеком, я женился на 19-летней девушке. Незначительная разница в возрасте — всего 6 лет — способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного лет у меня была уже и маленькая семья из 5 детей. Жалованья я получал в месяц 50 руб., из которых $^1/_5$ *приходилось отдавать сестре, так что мы с детьми жили на 40 руб. в месяц.*

Трудно ли изображать числа в других системах счисления? Нисколько. Положим, вы желаете число 119 изобразить в пятеричной системе. Делите 119 на 5, чтобы узнать, сколько в нем единиц первого разряда:

$$119 : 5 = 23, \text{ остаток } 4.$$

Значит, число простых единиц будет 4. Далее, 23 пятерки не могут стоять все во втором разряде, так как высшая цифра в пятеричной системе — 4, и больше 4 единиц ни в одном разряде быть не должно. Делим поэтому 23 на 5:

$$23 : 5 = 4, \text{ остаток } 3.$$

Это показывает, что во втором разряде (пятерок) будет цифра 3, а в третьем („двадцатипятерок“) — 4.

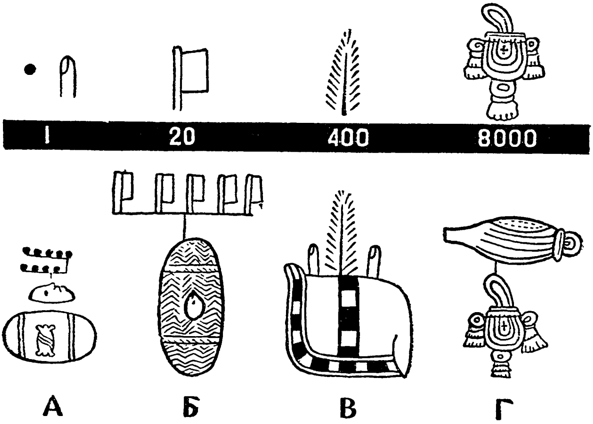
Итак, $119 = 4 \times 25 + 3 \times 5 + 4$, или в пятеричной системе „434“.

Сделанные действия для удобства располагают так:

$$\begin{array}{r|l} 119 & 5 \\ \cline{1-1} \mathit{4} & \begin{array}{r|l} 23 & 5 \\ \cline{1-1} \mathit{3} & \mathit{4} \end{array} \end{array}$$

Курсивные цифры (при письме можно их подчеркивать) выписывают справа налево и сразу получают искомое изображение числа в иной системе.

Приведем еще примеры.



Числовая система ацтеков Мексики была двадцатеричной. Количества до 20 они изображали числом точек или пальцев; для 20 рисовался флаг; число 400 (20 × 20) имело значок, похожий на ель, который значил — „многочисленный, как волосы“. Для самой большой единицы счета — 8000 (20 × 20 × 20) — изображался мешок: он символизировал огромное количество бобов какао в мешке. Чтобы изобразить некоторое количество предметов, ацтеки прямо пририсовывали к изображению этого предмета нужные числовые значки: таким образом, *А* означает 9 масок из драгоценного камня; *Б* — 100 мешков какао; *В* — 402 бумажных одеяла указанного рисунка; *Г* — 8000 связок листьев копаловой камеди.

Пример 1.

Изобразить 47 в троичной системе:

Решение:

$$\begin{array}{r|r|r|r} 47 & 3 & & \\ \cline{1-2} 2 & 15 & 3 & \\ \cline{2-3} & 0 & 5 & 3 \\ \cline{3-4} & & 2 & 1 \end{array}$$

Ответ: „1202". Проверка: $1 \times 27 + 2 \times 9 + 0 \times 3 + 2 = 47$.

Пример 2.

Число 200 изобразить в семеричной системе.

Решение:

$$\begin{array}{r|r|r} 200 & 7 & \\ \cline{2-2} 14 & 28 & 7 \\ \cline{1-3} 60 & 0 & 4 \\ \cline{1-1} 4 & & \end{array}$$

Ответ: „404". Проверка: $4 \times 49 + 0 \times 7 + 4 = 200$.

Пример 3.

Число 163 изобразить в двенадцатеричной системе.

Решение:

$$\begin{array}{r|r|r} 163 & 12 & \\ \cline{1-2} 43 & 13 & 12 \\ \cline{1-3} 7 & 1 & 1 \end{array}$$

Ответ: „117". Проверка: $1 \times 144 + 1 \times 12 + 7 = 163$

Теперь читатель не затруднится изобразить любое число в какой угодно системе счисления. Единственная помеха может возникнуть лишь вследствие того, что в некоторых случаях не будет доставать обозначений для цифр. В самом деле: при изображении числа в системах с основанием более десяти (например, двенадцатеричной), может явиться надобность в цифрах

„десять“ и „одиннадцать“. Из этого затруднения нетрудно выйти, избрав для новых цифр какие-нибудь условные знаки или буквы — хотя бы, например, буквы К и Л.

Так, число 1579 в двенадцатеричной системе изобразится следующим образом:

$$\begin{array}{r|r|r}
1579 & 12 & \\
\underline{12} & \overline{131} & 12 \\
\underline{37} & \mathit{11} & \overline{\mathit{10}} \\
\underline{19} & & \\
\mathit{7} & &
\end{array}$$

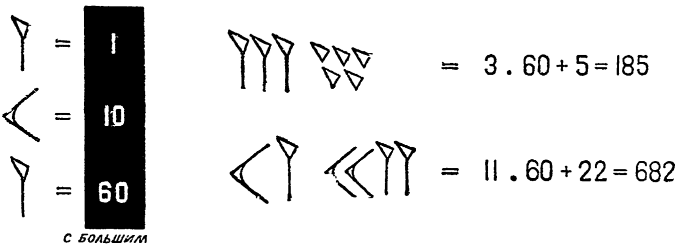
Ответ: „(10)(11)7“, или КЛ7. Проверка: $10 \times 144 + 11 \times 12 + 7 = 1579$.

Выразите:

1) Число 1926 в двенадцатеричной системе.
2) Число 273 в двадцатеричной системе.

ПРОСТЕЙШАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Нетрудно сообразить, что в каждой системе высшая цифра, какая может понадобиться, равна основанию этой



Клинописные цифры вавилонской шестидесятеричной системы. Для записи целых чисел вавилоняне пользовались всего двумя знаками — 1 и 10; 60 изображалось знаком единицы, но с большим интервалом от следующих цифр.

системы без единицы. Например, в десятичной системе высшая цифра 9, в шестеричной — 5, в троичной — 2, в пятнадцатеричной — 14 и т. д.

Самая простая система счисления, конечно, та, для которой требуется меньше всего цифр. В десятичной системе нужны десять цифр (считая и 0), в пятеричной — пять цифр, в троичной — три цифры (1, 2 и 0), в двоичной — только две цифры (1 и 0).

Существует ли и „единичная“ система? Конечно, — это система, в которой единицы высшего разряда в один раз больше единицы низшего, то-есть равны ей; другими словами, „единичной“ можно назвать такую систему, в которой единицы всех разрядов имеют одинаковое значение. Это самая примитивная „система“; ею пользовался первобытный человек, делая на дереве зарубки по числу сосчитываемых предметов. Но между нею и всеми другими системами счета есть громадная разница: она лишена главного преимущества нашей нумерации — так называемого поместного значения цифр. Действительно: в „единичной“ системе знак, стоящий на третьем или пятом месте, имеет то же значение, что и стоящий на первом месте. Между тем даже в двоичной системе единица на третьем месте (справа) уже в 4 раза (2 × 2) больше, чем на первом, а на пятом — в 16 раз больше (2 × 2 × 2 × 2). Для изображения какого-нибудь числа по „единичной“ системе нужно ровно столько же знаков, сколько было сосчитано предметов: чтобы записать сто предметов, нужно сто знаков, в двоичной же — только семь („1100100“), а в пятеричной — всего три („400“).

Вот почему „единичную“ систему едва ли можно назвать „системой“; по крайней мере, ее нельзя поставить рядом с остальными, так как она принципиально от них отличается, не давая никакой экономии в изображении чисел. Если же ее откинуть, то простейшей системой счисления нужно признать систему двоичную, в которой употребляются всего две цифры: 1 и 0. При помощи единицы и нуля можно изобразить все бесконечное множество чисел. На практике система эта мало удобна — получаются слишком длинные числа [1]; но теоретически она имеет все права считаться простейшей. Она обладает некоторыми любопытными особенностями, присущими только ей одной; особенностями этими, между прочим, можно воспользоваться для выполнения ряда эффектных математических фокусов, о которых мы скоро побеседуем подробно в главе „Фокусы без обмана“.

НЕОБЫЧАЙНАЯ АРИФМЕТИКА.

К арифметическим действиям мы привыкли настолько, что выполняем их автоматически, почти не думая о том, что мы делаем. Но те же действия потребуют от нас немалого напряжения, если мы пожелаем применить их к числам, написанным не по десятичной системе. Попробуйте, например, выполнить сложение следующих двух чисел, написанных по пятеричной системе:

„4203“
\+ „2132“ (по пятеричной системе)

Складываем по разрядам, начиная с единиц, то-есть справа: $3+2$ равно 5; но мы не можем записать 5, потому что такой цифры в пятеричной системе не существует: 5 есть уже единица высшего разряда. Значит, в

---

[1] Зато, как увидим далее, для такой системы до крайности упрощаются таблица сложения и таблица умножения.

сумме вовсе нет единиц; пишем 0, а 5, то-есть единицу следующего разряда, удерживаем в уме. Далее, $0+3=3$, да еще единица, удержанная в уме, — всего 4 единицы второго разряда. В третьем разряде получаем $2+1=3$. В четвертом $4+2$ равно 6, то-есть $5+1$; пишем 1, а 5, то-есть единицу высшего разряда, относим далее влево.

Искомая сумма = 11 340.

$$\begin{array}{r}\text{„4203“}\\ +\ \text{„2132“}\\ \hline \text{„11340“}\end{array}\ \text{(по пятеричной системе)}$$

Предоставляем читателю проверить это сложение, предварительно переводя изображенные в кавычках числа в десятичную систему.

Точно так же выполняются и другие действия. Для упражнения приводим далее ряд примеров, число которых читатель, при желании, может увеличить самостоятельно:

По пятеричной системе
$$\begin{array}{r}\text{„2143“}\\ -\ \text{„334“}\\ \hline \end{array}\qquad \begin{array}{r}\text{„213“}\\ \times\ \text{„3“}\\ \hline \end{array}\qquad \begin{array}{r}\text{„42“}\\ \times\ \text{„31“}\\ \hline \end{array}$$

По троичной системе
$$\begin{array}{r}\text{„212“}\\ +\ \text{„120“}\\ \text{„201“}\\ \hline \end{array}\qquad \begin{array}{r}\text{„122“}\\ \times\ \text{„20“}\\ \hline \end{array}\qquad \begin{array}{l}\text{„220“} : \text{„2“} =\\ \text{„201“} : \text{„12“} =\end{array}$$

При выполнении этих действий мы сначала мысленно изображаем написанные числа в привычной нам десятичной системе, а получив результат, снова изображаем его в требуемой недесятичной системе. Но можно поступать и иначе: составить „таблицу сложения“ и „таблицу умножения“ в тех же системах, в которых даны нам числа, и пользоваться ими непосредственно. Например, таблица сложения в пятеричной системе такова:

0	1	2	3	4
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	12
4	10	11	12	13

С помощью этой таблички мы могли бы сложить числа „4203“ и „2132“, написанные в пятеричной системе, гораздо менее напрягая внимание, чем при способе, примененном раньше.

Упрощается также выполнение вычитания.

Составим и таблицу умножения („Пифагорову“ [1]) для пятеричной системы:

1	2	3	4
2	4	11	13
3	11	14	22
4	13	22	31

Имея эту табличку перед глазами, вы опять-таки можете облегчить себе труд умножения (и деления) чисел

---

[1] Пифагор (VI век до нашей эры) — древнегреческий философ; занимался также математикой и теорией музыки.

в пятеричной системе, как легко убедиться, применив ее к приведенным выше примерам. Например, при умножении

$$\text{по пятеричной системе}\quad \begin{array}{r} \times\ \text{„213“} \\ \text{„3“} \\ \hline \text{„1144“} \end{array}$$

рассуждаем так: трижды три „14“ (из таблицы); 4 пишем, 1 — в уме. 1 на 3 дает 3, да еще 1, — пишем 4. Дважды три = „11“; 1 пишем, 1 переносим влево. Получаем в результате „1144“.

Чем меньше основание системы, тем меньше и соответствующие таблицы сложения и умножения. Например, для троичной системы обе таблицы таковы:

Таблица сложения для троичной системы:

0	1	2
1	2	10
2	10	11

Пифагорова таблица для троичной системы:

1	2
2	11

Их можно было бы сразу же запомнить и пользоваться ими для выполнения действия. Самые маленькие таблицы сложения и вычитания получаются для двоичной системы:

Таблица сложения для двоичной системы:

0	1
1	10

Таблица умножения для двоичной системы:

1×1=1

При помощи таких-то простых „таблиц“ можно выполнять в двоичной системе все четыре действия. Умножения в этой системе, в сущности, как бы и вовсе нет: ведь умножить на единицу — значит оставить число без изменения; умножение же на „10“, „100“, „1000“ (то-есть на 2, 4, на 8) сводится к простому приписыванию справа соответствующего числа нолей. Что же касается сложения, то для выполнения его нужно помнить только одно, что в двоичной системе $1+1=10$. Не правда ли, мы с полным основанием назвали раньше двоичную систему самой простой из всех возможных? Длиннота чисел этой своеобразной арифметики искупается простотой выполнения над ними всех арифметических действий. Пусть требуется, например, умножить:

$$\begin{array}{c}\text{В двоичной}\\ \text{системе}\end{array}\left\{\begin{array}{rr} \times & „1001011101“ \\ & „100101“ \\ \hline & „1001011101“ \\ + & „1001011101“ \\ & „1001011101“ \\ \hline & „1010111011110001“ \end{array}\right.$$

Выполнение действия сводится только к переписыванию длинных чисел в надлежащем расположении: это требует несравненно меньших умственных усилий, чем умножение тех же чисел в десятичной системе ($605\times 37=22\,385$).

Если бы у нас была принята двоичная система, изучение письменного счисления требовало бы наименьшего напряжения мысли (зато — наибольшего количества бумаги и чернил). Однако в устном счете двоичная арифметика по удобству выполнения действий значительно уступает нашей десятичной.

Приведем также образчик действия деления, выполненного в двоичной системе счисления:

$$\begin{array}{l} 10000010:111=10010 \\ \underline{111} \\ \underline{1001} \\ \underline{111} \\ 100 \end{array}$$

В привычной нам десятичной системе действие это имело бы следующий вид:

$$
\begin{array}{rl}
130 & :7=18 \\
\underline{7} & \\
60 & \\
\underline{56} & \\
4 &
\end{array}
$$

Делимое, делитель, частное и остаток в обоих случаях, по существу, одинаковы, но промежуточные выкладки разные.

ЧЁТ ИЛИ НЕЧЕТ?

Не видя числа, трудно, конечно, угадать, какое оно — четное или нечетное. Но не думайте, что вы всегда сможете сказать это, едва увидите задаваемое число. Скажите, например, четное или нечетное число 16?

Если вам известно, что оно написано по десятичной системе, то вы вправе утверждать, что число это — четное. Но когда оно написано по какой-либо другой системе — можно ли быть уверенным, что оно изображает непременно четное число?

Оказывается, нет. Если основание, например, семь, то „16“ означает $7+6=13$, число нечетное. То же будет и для всякого нечетного основания (потому что всякое нечетное число $+\ 6$ есть тоже нечетное число).

Отсюда вывод, что знакомый нам признак делимости на 2 (последняя цифра четная) безусловно пригоден только для десятичной системы счисления, для других же — не всегда. А именно, он верен только для системы счисления с четным основанием: шестеричной, восьмеричной и т. п. Каков же признак делимости на 2 для систем с нечетным основанием? Достаточно краткого размышления, чтобы установить его: сумма цифр должна быть четной. Например, число „136“ четное во всякой системе счисления, даже с нечетным основанием; действительно, в последнем случае имеем: нечетное число[1] + нечетное число + четное = четному числу.

С такою же осторожностью надо отнестись к задаче: всегда ли число 25 делится на 5? В семеричной или восьмеричной системе число, так изображенное, не делится на 5 (потому что оно равно 19 или 21). Точно так же общеизвестный признак делимости на 9 (по сумме цифр) правилен только для десятичной системы. Напротив, в пятеричной системе тот же признак применим для делимости на 4, а, например, в семеричной — на 6. Так, число „323“ в пятеричной системе делится на 4, потому что $3+2+3=8$, а число „51“ в семеричной — на 6 (легко убедиться, переведя числа в десятичную систему: получим соответственно 88 и 36). Почему это так, читатель сам сможет сообразить, если вникнет хорошенько в вывод признака делимости на 9 и приложит те же рассуждения, соответственно измененные, например, к семеричной системе для вывода признака делимости на 6.

Труднее доказать чисто арифметическим путем справедливость следующих положений:

$121:11 = 11$
$144:12 = 12$ во всех системах счисления (где имеются соответствующие цифры)
$21 \times 21 = 441$

Знакомые с алгеброй легко найдут основание, объясняющее свойство этих равенств. Остальные читатели могут испытать их для разных систем счисления.

---

[1] Нечетное число, умноженное на себя (то-есть на нечетное), всегда дает нечетное число (например, $7 \times 7 = 49$; $11 \times 11 = 121$ и т. п.).

Поучительные задачи

1. Когда $2 \times 2 = 100$?
2. Когда $2 \times 2 = 11$?
3. Когда 10 — число нечетное?
4. Когда $2 \times 3 = 11$?
5. Когда $3 \times 3 = 14$?

Ответы на эти вопросы не должны затруднить читателя, познакомившегося с настоящей главой „Занимательной арифметики“.

ДРОБИ БЕЗ ЗНАМЕНАТЕЛЯ

Мы привыкли к тому, что без знаменателя пишутся лишь дроби десятичные. Поэтому с первого взгляда кажется, что написать прямо без знаменателя дробь $^2/_7$ или $^1/_3$ нельзя. Дело представится нам, однако, иначе, если вспомним, что дроби без знаменателя возможны и в других системах счисления. Что, например, означает дробь „0,4“ в пятеричной системе? Конечно, $^4/_5$. Дробь „1,2“ в семеричной системе означает $1^2/_7$. А что означает в той же семеричной системе дробь „0,33“? Здесь результат сложнее: $^3/_7 + {^3/_{49}} = {^{24}/_{49}}$.

Рассмотрим еще несколько недесятичных дробей без знаменателя. Чему равны

a) „2,121“ в троичной системе?
b) „1,011“ в двоичной системе?
c) „3,431“ в пятеричной системе?
d) „2,(5)“ в семеричной системе?

Ответы:

a) $2 + {^1/_3} + {^2/_9} + {^1/_{27}} = 2^{15}/_{27}$.
b) $1 + {^1/_4} + {^1/_8} = 1^3/_8$.
c) $3 + {^4/_5} + {^3/_{25}} + {^1/_{125}} = 3^{116}/_{125}$.
d) $2 + {^5/_7} + {^5/_{49}} + {^5/_{343}} + \ldots = 2^5/_6$.

В правильности последнего равенства читатель легко может убедиться, если попробует применить к данному случаю, с соответствующим видоизменением, рассуждения, относящиеся к превращению десятичных периодических дробей в простые.

В заключение рассмотрим несколько задач особого рода:

Задача № 1

По какой системе счисления выполнено следующее сложение:

$$\begin{array}{rr}
 & 756\\
+ & 307\\
 & 2456\\
 & \underline{24}\\
 & 3767
\end{array}$$

Задача № 2

По какой системе счисления выполнено деление:

$$\begin{array}{l}
4415400:4532=543\\
\underline{40344}\\
34100\\
\underline{31412}\\
22440\\
\underline{22440}
\end{array}$$

Задача № 3

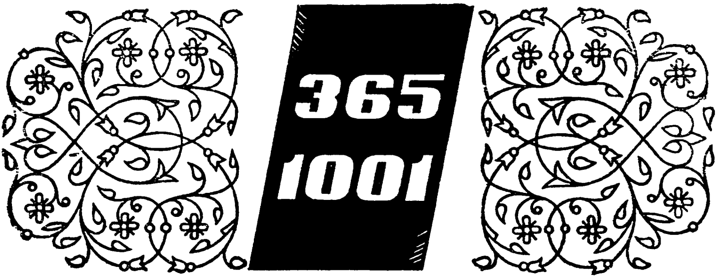
Напишите число 130 во всех системах счисления: от двоичной до девятеричной включительно.

Задача № 4

Чему равно число „123“, если считать его написанным во всех системах счисления, до девятеричной включительно? Возможно ли, что оно написано по двоичной системе? А по троичной? Если оно написано по пятеричной системе, то можете ли вы узнать, не переписывая его по десятичной системе, делится ли оно без остатка на 2? Если написано по семеричной системе, то делится ли оно без остатка на 6? Если написано по десятичной системе, то делится ли оно без остатка на 4?

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КУРЬЕЗ

$$2^5 \cdot 9^2 = 2592$$



ГЛАВА ПЯТАЯ

ГАЛЕРЕЯ ЧИСЛОВЫХ ДИКОВИНОК

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ КУНСТКАМЕРА[1]

В мире чисел, как и в мире живых существ, встречаются подлинные диковинки, редкие экземпляры, обладающие исключительными свойствами. Из таких необыкновенных чисел можно было бы составить своего рода музей числовых редкостей, настоящую „арифметическую кунсткамеру“. В ее витринах нашли бы себе место не только числовые исполины, о которых мы побеседуем в особой главе, но и числа скромных размеров, зато выделяющиеся из ряда других какими-либо необычайными свойствами. Некоторые из них уже по внешности привлекают к себе внимание; другие

---

[1] Кунсткамера — бессистемное собрание разнородных редкостей — художественных, естественно-исторических и др.; помещение для такого собрания.

открывают свои диковинные особенности лишь при более близком знакомстве.

Представленные в нашей „галерее“ любопытные особенности некоторых чисел не имеют ничего общего с теми воображаемыми диковинками, которые усматривают в иных числах любители таинственного. Образчиком подобных числовых суеверий может служить следующее арифметическое соображение, неосторожно высказанное знаменитым французским писателем Виктором Гюго:

„Три — число совершенное. Единица для числа 3 то же, что диаметр для круга. Среди прочих чисел 3 то же, что круг среди фигур. Число 3 — единственное, имеющее центр. Остальные числа — эллипсы, имеющие два фокуса. Отсюда следующая особенность, присущая единственно числу 3: сложите цифры любого числа, кратного 3, сумма всегда делится без остатка на 3“.

В этом туманном и мнимо глубокомысленном откровении все неверно: что ни фраза, то либо вздор, либо вовсе бессмыслица. Верно только замечание о свойстве суммы цифр, но свойство это не вытекает из сказанного и к тому же не представляет исключительной особенности числа 3: им отличается в десятичной системе также и число 9, а во всех вообще системах — числа, на единицу меньшие основания.

Диковинки нашей галереи — иного рода: в них нет ничего таинственного или неразгаданного.

Приглашаю читателя совершить экскурсию по галерее таких числовых диковинок и познакомиться с некоторыми из них.

Пройдем, не останавливаясь, мимо первых витрин, заключающих числа, свойства которых нам хорошо знакомы. Мы знаем уже, почему попало в галерею диковинок число 2: не потому, что оно первое четное число[1], а потому, что оно — основание самой любопытной системы счисления (см. стр. 65).

Не удивимся мы, встретив тут 5 — одно из наших любимейших чисел, играющее важную роль при всяких „округлениях“. Не будет неожиданностью для нас найти здесь и число 9 — конечно, не как „символ постоянства“[2], а как число, облегчающее нам проверку всех арифметических действий (см. стр. 43). Но вот витрина, за стеклом которой мы видим

ЧИСЛО 12

Чем оно замечательно? Это число месяцев в году и число единиц в дюжине. Но что, в сущности, особенного в дюжине? Немногим известно, что 12 — старинный и едва не победивший соперник числа 10 в борьбе за почетный пост основания системы счисления. Культурнейший народ древнего Востока — вавилоняне и их предшественники, населявшие Двуречье, вели счет в двенадцатеричной системе счисления. И если бы не пересилившее влияние Индии, подарившей нам десятичную систему, мы, вероятно, унаследовали бы от Вавилона двенадцатеричную систему. Кое в чем мы и до сих пор платим дань этой системе, несмотря на победу десятичной. Наше пристрастие к дюжинам и гроссам[3], наше деление суток на 2 дюжины часов деление часа на 5 дюжин минут, деление минуты на столько же секунд, деление круга на 30 дюжин гра-

---

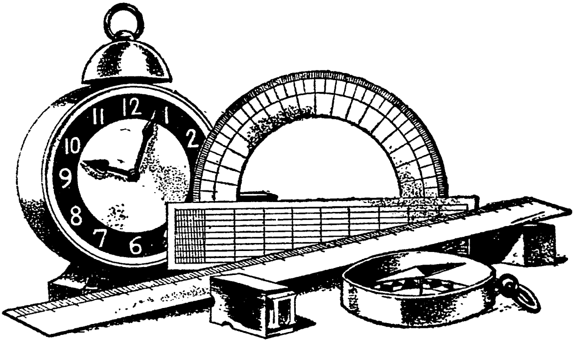
[1] Первым четным числом можно, впрочем, считать не 2, а 0.

[2] Древние (последователи Пифагора) считали 9 символом постоянства, „так как все числа, кратные 9, имеют сумму цифр, кратную 9“.

[3] Гросс — 12 дюжин. В коробке перьев — гросс, 144 штуки.

дусов, наконец деление фута на 12 дюймов[1], — не свидетельствует разве все это (и многое другое) о том, как велико в наши дни влияние этой древней системы?

Хорошо ли, что в борьбе между дюжиной и десяткой победила последняя? Конечно, сильными союзниками десятки были и остаются наши собственные руки с десятью пальцами — живые счетные машины. Но если бы не это, то следовало бы безусловно отдать предпочтение 12 перед 10. Гораздо удобнее производить расчеты по двенадцатеричной системе, нежели по десятичной. Причина та, что число 10 делится без остатка на 2 и на 5, между тем как 12 делится и на 2, и на 3, и на 4, и на 6. У 10 всего два делителя, у 12 — четыре. Преимущества двенадцатеричной системы станут вам яснее, если вы примете в соображение, что в двенадцатеричной системе число, оканчивающееся нолем, кратно и 2, и 3, и 4, и 6; подумайте, как удобно



Вавилонский счет на дюжины до сих пор сохранился у нас в исчислении времени, в делении окружности, в типографских мерах.

---

[1] Фут равен 30,479 *см.*

дробить число, когда и $^1/_2$, и $^1/_3$, и $^1/_4$, и $^1/_6$ его должны быть целыми числами! Если же выраженное в двенадцатеричной системе число оканчивается двумя нолями, то оно должно делиться без остатка на 144, а следовательно, и на все множители 144, то-есть на следующий длинный ряд чисел:

2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144.

Четырнадцать делителей — вместо тех восьми, которые имеют числа, написанные в десятичной системе, если оканчиваются двумя нолями (2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 и 100). В нашей системе только дроби вида $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_{20}$ и т. д. превращаются в конечные десятичные; в двенадцатеричной же системе можно написать без знаменателя гораздо более разнообразные дроби, и прежде всего: $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_6$, $^1/_8$, $^1/_9$, $^1/_{12}$, $^1/_{16}$, $^1/_{18}$, $^1/_{24}$, $^1/_{36}$, $^1/_{48}$, $^1/_{72}$, $^1/_{144}$, которые соответственно изобразятся так:

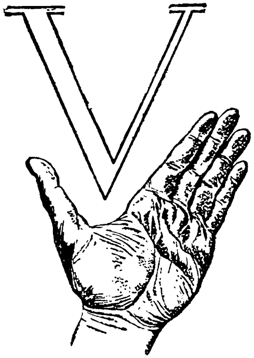
0,6; 0,4; 0,3; 0,2; 0,16; 0,14; 0,1; 0,09; 0,08; 0,06; 0,04; 0,03; 0,02; 0,01.

Было бы, впрочем, большим заблуждением думать, что делимость числа может зависеть от того, в какой системе счисления оно изображено. Если орехи, заключающиеся в данном мешке, могут быть разложены в пять одинаковых куч, то это свойство их, конечно, не изменится от того, будет ли наше число орехов выражено в той или иной системе счисления, или отложено на счетах, или написано прописью, или, наконец, изображено каким-либо иным способом. Если число, написанное в двенадцатеричной системе, делится на 6 или на 72, то, будучи выражено в другой системе счисления, например в десятичной, оно должно иметь те же делители. Разница лишь в том, что в двенадцатеричной системе делимость на 6 или на 72 легче обнаружить (число оканчивается одним или двумя нолями).

Когда говорят о преимуществе двенадцатеричной системы в смысле делимости на большое число делителей, то имеют в виду, что благодаря склонности нашей к „круглым“ числам на практике будут чаще встречаться числа, оканчивающиеся в двенадцатеричной системе нолями.

При таких преимуществах двенадцатеричной системы неудивительно, что среди математиков раздавались голоса за полный переход на эту систему. Однако мы уже чересчур тесно сжились с десятичной системой, чтобы решаться на такую реформу.

Великий французский математик Лаплас так высказался по этому вопросу 100 лет назад: „Основание нашей системы нумерации не делится на 3 и на 4, то-есть на два делителя, весьма употребительные по их простоте. Присоединение двух новых знаков (цифр) дало бы системе счисления это преимущество; но такое нововведение было бы несомненно отвергнуто. Мы потеряли бы выгоду, породившую нашу арифметику,— именно, возможность счета по пальцам рук“.



Десятичная система счисления родилась из счета по пальцам. Римская цифра V напоминает руку с отставленным большим пальцем.

Напротив, следовало бы ради единообразия перейти также в измерении дуг от употребительных градусов и минут к новым, десятичным.

Такую реформу пытались провести во Франции, но она не привилась. Не кто иной, как упомянутый Лаплас, был горячим сторонником этой реформы. Его знаменитая книга „Изложение системы мира“ последовательно проводит десятичное подразделение углов: градусом он называет не 90-ю, а 100-ю долю прямого угла, минутой — 100-ю часть градуса и т. д. Лаплас высказался даже за десятичное подразделение часов и минут. „Однообразие системы мер требует, чтобы день был разделен на 100 часов, час на 100 минут и минута на 100 секунд“,— писал он.

Вы видите, следовательно, что дюжина имеет за собой длинную историю и что число 12 не без основания очутилось в галерее числовых диковинок. Зато его соседка — „чортова дюжина“, 13, фигурирует здесь не потому, что чем-либо замечательна, а скорее именно потому, что ничем не замечательна, хотя и пользуется такой мрачной славой: разве не удивительно в самом деле, что ровно ничем не выделяющееся число могло стать столь „страшным“ для суеверных людей?

Как было распространено это суеверие (зародившееся в древнем Вавилоне), видно из того, что царское правительство при устройстве электрического трамвая в Петербурге долго не решалось вводить маршрута № 13 и пропустило его, перейдя сразу на № 14: власти думали, что публика не станет ездить в вагонах с таким „роковым“ номером. Любопытно и то, что в Петербурге было не мало домов, где 13-й номер квартиры пропущен... В гостинице также нередко отсутствовала комната № 13, заменяемая № 12а. Для борьбы с этим ничем не обоснованным числовым суеверием кое-где на Западе (например, в Англии) учреждались даже особые „клубы числа 13“...

В следующей витрине арифметической кунсткамеры перед нами

ЧИСЛО 365

Оно замечательно прежде всего тем, что определяет число дней в году. Далее, при делении на 7 оно дает в остатке 1; эта несущественная, казалось бы, особенность числа 365 имеет большое значение для нашего семидневного календаря.

Другая особенность числа 365 не связана с календарем:

$$365 = 10 \times 10 + 11 \times 11 + 12 \times 12,$$

то-есть 365 равно сумме квадратов трех последовательных чисел, начиная с 10:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365.$$

Но и это еще не всё — тому же равна сумма квадратов двух следующих чисел 13 и 14:

$$13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365.$$

На этом свойстве числа 365 основана задача С. А. Рачинского, изображенная на известной картине „Трудная задача“ Богданова-Бельского:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}.$$

Таких чисел не много наберется в нашей галерее арифметических диковинок.

ТРИ ДЕВЯТКИ

В следующей витрине выставлено наибольшее из всех трехзначных чисел: 999.

Любопытная особенность числа 999 проявляется при умножении на него всякого другого трехзначного числа. Получается шестизначное произведение; первые три цифры его есть умножаемое число, уменьшенное на единицу, а остальные три цифры — „дополнения“ первых до 9. Например:

$$\begin{array}{rr} & 572 \\ 573 \times 999 = & 572\,427 \\ \cline{2-2} & 999 \end{array}$$

Стоит лишь взглянуть на следующую строку, чтобы понять происхождение этой особенности:

$$573 \times 999 = 573 \times (1000 - 1) = \left\{ \begin{array}{r} 573\,000 \\ -\,573 \\ \hline 572\,427 \end{array} \right.$$

Зная эту особенность, мы можем „мгновенно“ умножать любое трехзначное число на 999.

$$947 \times 999 = 946\,053,$$
$$509 \times 999 = 508\,491,$$
$$981 \times 999 = 980\,019 \text{ и т. д.}$$

А так как $999 = 9 \times 111 = 3 \times 3 \times 3 \times 37$, то вы можете, опять-таки с молниеносной быстротой, писать целые колонны шестизначных чисел, кратных 37; незнакомый со свойствами числа 999, конечно, сделать этого не в состоянии. Короче говоря, вы можете устраивать перед непосвященными маленькие сеансы „мгновенного умножения и деления“.

ЧИСЛО ШЕХЕРАЗАДЫ

Следующее на очереди у нас число 1001 — прославленное число Шехеразады. Вы, вероятно, и не подозревали, что в самом названии сборника волшебных арабских сказок заключается также своего рода чудо, которое могло бы поразить воображение сказочного султана не менее многих других чудес Востока, если бы он способен был интересоваться арифметическими диковинками.

Чем же замечательно число 1001? С виду оно кажется весьма обыкновенным. Оно даже не принадлежит к избранному разряду так называемых „простых“

чисел. Оно делится без остатка и на 7, и на 11, и на 13 — на три последовательных простых числа, произведением которых оно и является. Но не в том диковинка, что число $1001 = 7 \times 11 \times 13$, — здесь нет еще ничего волшебного. Замечательнее то, что при умножении на него трехзначного числа получается результат, состоящий из самого умноженного числа, только написанного дважды, например:

$$873 \times 1001 = 873\,873,$$
$$207 \times 1001 = 207\,207 \text{ и т. д.}$$

И хотя этого и следовало ожидать, так как $873 \times 1001 = 873 \times 1000 + 873 = 873\,000 + 873$, — все же, пользуясь указанным свойством „числа Шехеразады“, можно достичь результатов совсем неожиданных, кажущихся волшебными, — по крайней мере, человеку неподготовленному.

Сейчас поясним, в чем дело.

Товарищей, не посвященных в арифметические тайны, вы можете поразить следующим фокусом. Пусть кто-нибудь напишет на бумажке секретно от вас трехзначное число, какое хочет, и затем пусть припишет к нему еще раз то же самое число. Получится шестизначное число. Предложите тому же товарищу или его соседу разделить, секретно от вас, это число на 7; при этом вы заранее предсказываете, что остатка не получится. Результат передается новому соседу, который по вашему предложению делит его на 11; и хотя вы не знаете делимого, вы все же смело утверждаете, что и оно разделится без остатка. Полученный результат вы направляете следующему соседу, которого просите разделить это число на 13, — деление снова выполняется без остатка, о чем вы заранее предупреждаете. Результат третьего деления вы, не глядя на полученное число, вручаете первому товарищу со словами:

— Вот число, которое ты задумал!

— Так и есть: ты угадал.

Какова разгадка фокуса?

Этот красивый арифметический фокус, производящий на непосвященных впечатление волшебства, объясняется очень просто: вспомните, что приписать к трехзначному числу его само — значит умножить его на 1001, то-есть на произведение $7 \times 11 \times 13$. Шестизначное число, которое ваш товарищ получит после того, как припишет к задуманному числу его само, должно будет поэтому делиться без остатка и на 7, и на 11, и на 13; а в результате деления последовательно на эти три числа (то-есть на их произведение — 1001) оно должно, конечно, снова дать задуманное число.

ЧИСЛО 10 101

После сказанного о числе 1001 уже не будет неожиданностью увидеть в витринах нашей галереи число 10 101. Вы догадаетесь, какому именно свойству обязано это число такою честью. Оно, как и число 1001, дает удивительный результат при умножении, но не трехзначных чисел, а двузначных; каждое двузначное число, умноженное на 10 101, дает в результате само себя, написанное трижды. Например:

$$73 \times 10\,101 = 737\,373,$$
$$21 \times 10\,101 = 212\,121.$$

Причина уясняется из следующей строки:

$$73 \times 10\,101 = 73 \times (10\,000 + 100 + 1) = \left\{ \begin{array}{r} 730\,000 \\ +7\,300 \\ 73 \\ \hline 737\,373 \end{array} \right.$$

Можно ли проделывать с помощью этого числа фокусы необычайного отгадывания, как с помощью числа 1001?

Да, можно. Здесь возможно даже обставить фокус разнообразнее, если иметь в виду, что 10 101 есть произведение четырех простых чисел:

$$10\,101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37.$$

Предложив товарищу задумать какое-нибудь двузначное число, вы предлагаете второму приписать к нему то же число, а третьему — приписать то же число еще раз. Четвертого вы просите разделить получившееся шестизначное число, например, на 7; пятый товарищ должен разделить полученное частное на 3; шестой делит то, что получилось, на 37, и, наконец, седьмой делит этот результат на 13, причем все четыре деления выполняются без остатка. Результат последнего деления вы просите передать первому товарищу: это и есть задуманное им число.

При повторении фокуса вы можете внести в него некоторое разнообразие, обращаясь каждый раз к новым делителям. А именно, вместо четырех множителей $3 \times 7 \times 13 \times 37$ можете взять следующие группы трех множителей: $21 \times 13 \times 37$; $7 \times 39 \times 37$; $3 \times 91 \times 37$; $7 \times 13 \times 111$.

Число это — 10 101, — пожалуй, даже удивительнее волшебного числа Шехеразады, хотя и менее его известно своими поразительными свойствами. О нем писалось, впрочем, еще двести лет назад в „Арифметике“ Магницкого, в главе, где приводятся примеры умножения „с некоим удивлением“. С тем большим основанием должны мы включить его в наше собрание арифметических диковинок.

ЧИСЛО 10 001

С этим числом вы также можете проделать фокусы вроде предыдущих, хотя, пожалуй, не столь эффектные. Дело в том, что оно представляет собой произведение только двух простых чисел:

$$10\,001 = 73 \times 137.$$

Как воспользоваться этим для выполнения арифметических действий „с удивлением“, читатель, надеюсь, после всего сказанного выше догадается сам.

ШЕСТЬ ЕДИНИЦ

В следующей витрине мы видим новую диковинку арифметической кунсткамеры — число, состоящее из шести единиц. Благодаря знакомству с волшебными свойствами числа 1001, мы сразу соображаем, что

$$111\,111 = 111 \times 1001.$$

Но $111 = 3 \times 37$, а $1001 = 7 \times 11 \times 13$. Отсюда следует, что наш новый числовой феномен[1], состоящий из одних лишь единиц, представляет собой произведение пяти простых множителей. Соединяя же эти пять множителей в две группы на всевозможные лады, мы получаем 15 пар множителей, дающих в произведении одно и то же число — 111 111:

$$3 \times (7 \times 11 \times 13 \times 37) = 3 \times 37\,037 = 111\,111$$

$$7 \times (3 \times 11 \times 13 \times 37) = 7 \times 15\,873 = 111\,111$$

$$11 \times (3 \times 7 \times 13 \times 37) = 11 \times 10\,101 = 111\,111$$

$$13 \times (3 \times 7 \times 11 \times 37) = 13 \times 8\,547 = 111\,111$$

$$37 \times (3 \times 7 \times 11 \times 13) = 37 \times 3\,003 = 111\,111$$

$$(3 \times 7) \times (11 \times 13 \times 37) = 21 \times 5\,291 = 111\,111$$

$(3 \times 11) \times (7 \times 13 \times 37) = 33 \times 3\,367 = 111\,111$ и т. д.

---

[1] Феномен — редкое явление, выходящее за пределы обычного или нормы.

Вы можете, значит, засадить 15 товарищей за работу умножения, и хотя каждый будет перемножать другую пару чисел, все получат один и тот же оригинальный результат: 111 111.

То же число, 111 111, пригодно и для отгадывания задуманных чисел наподобие того, как выполняется это с помощью чисел 1001 и 10 101. В данном случае нужно предлагать задумать число однозначное, то-есть одну цифру, и повторить ее 6 раз. Делителями здесь могут служить пять простых чисел: 3, 7, 11, 13, 37 и получающиеся из них составные: 21, 33, 39 и т. д. Это дает возможность до крайности разнообразить выполнение фокуса. Как надо поступать в этих случаях, предоставляю подумать читателю.

На примере числа 111 111 читатель видит, как можно использовать для арифметических фокусов число, состоящее из одних лишь единиц, если оно разлагается на множители. К счастью для любителей подобных фокусов, многие числа такого начертания составные, а не простые.

Из первых 17 чисел этого рода только два наименьшие — 1 и 11 — простые, остальные — составные. Вот как разлагаются на простые множители первые десять из составных чисел этого начертания:

$$\begin{aligned}
111 &= 3 \times 37\\
1\,111 &= 11 \times 101\\
11\,111 &= 41 \times 271\\
111\,111 &= 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37\\
1\,111\,111 &= 239 \times 4649\\
11\,111\,111 &= 11 \times 73 \times 101 \times 137\\
111\,111\,111 &= 9 \times 37 \times 333\,667\\
1\,111\,111\,111 &= 11 \times 41 \times 271 \times 9091\\
11\,111\,111\,111 &= 21\,649 \times 513\,239\\
111\,111\,111\,111 &= 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \times 101 \times 9901
\end{aligned}$$

Не все приведенные здесь числа удобно использовать для отгадывания; в некоторых случаях выполнение фокуса возложило бы на загадчика чересчур обременительную работу. Но числа из 3, из 4, из 5, из 6, из 8, из 9, из 12 единиц более или менее пригодны для этой цели. Образчики использования их для отгадывания будут даны в конце следующей главы.

ЧИСЛОВЫЕ ПИРАМИДЫ

В следующих витринах галереи нас поражают числовые достопримечательности совсем особого рода — некоторое подобие пирамид, составленных из чисел. Рассмотрим поближе первую из них:

$$\begin{array}{r}
1 \times 9 + 2 = 11 \\
12 \times 9 + 3 = 111 \\
123 \times 9 + 4 = 1111 \\
1234 \times 9 + 5 = 11111 \\
12345 \times 9 + 6 = 111111 \\
123456 \times 9 + 7 = 1111111 \\
1234567 \times 9 + 8 = 11111111 \\
12345678 \times 9 + 9 = 111111111
\end{array}$$

Как объяснить эти своеобразные результаты умножения?

Чтобы постичь эту странную закономерность, возьмем для примера какой-нибудь из средних рядов нашей числовой пирамиды: $123\,456 \times 9 + 7$. Вместо умножения на 9 можно умножить на $(10 - 1)$, то-есть приписать 0 и вычесть умножаемое:

$$123\,456 \times 9 + 7 = 1\,234\,560 + 7 - 123\,456 = \left\{ \begin{array}{r} 1\,234\,567 \\ -\ \ \ 123\,456 \\ \hline 1\,111\,111 \end{array} \right.$$

Достаточно взглянуть на последнее вычитание, чтобы понять, почему тут получается результат, состоящий только из одних единиц.

Мы можем уяснить себе это, исходя и из других рассуждений. Чтобы число вида 12 345... превратилось в число вида 11 111..., нужно из второй его цифры вычесть 1, из третьей — 2, из четвертой — 3, из пятой — 4 и т. д. — иначе говоря, вычесть из него то же число вида 12 345..., вдесятеро уменьшенное и предварительно лишенное последней цифры. Теперь понятно, что для получения искомого результата нужно наше число умножить на 10, прибавить к нему следующую за последней цифру и вычесть из результата первоначальное число (а умножить на 10 и отнять множимое — значит умножить на 9).

Сходным образом объясняется образование и следующей числовой пирамиды, получающейся при умножении определенного ряда цифр на 8 и прибавлении последовательно возрастающих цифр:

$$\begin{array}{c}
1 \times 8 + 1 = 9 \\
12 \times 8 + 2 = 98 \\
123 \times 8 + 3 = 987 \\
1234 \times 8 + 4 = 9876 \\
12345 \times 8 + 5 = 98765 \\
123456 \times 8 + 6 = 987654 \\
1234567 \times 8 + 7 = 9876543 \\
12345678 \times 8 + 8 = 98765432 \\
123456789 \times 8 + 9 = 987654321
\end{array}$$

Особенно интересна в пирамиде последняя строка, где в результате умножения на 8 и прибавления 9 происходит превращение натурального ряда цифр в таковой же ряд, но с обратным расположением. Объясним эту особенность.

Получение странных результатов уясняется из следующей строки:

$$12\,345 \times 8 + 5 = \left\{ - \begin{matrix} 12\,345 \times 9 + 6 \\ 12\,345 \times 1 + 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ - \begin{matrix} 111\,111^{1} \\ 12\,346, \end{matrix} \right.$$

---

[1] Почему $12\,345 \times 9 + 6$ дает именно 111 111, было показано при рассмотрении предыдущей числовой пирамиды.

то-есть $12\,345 \times 8 + 5 = 111\,111 - 12\,346$. Но, вычитая из числа 111 111 число 12 346, составленное из ряда возрастающих цифр, мы, как легко понять, должны получить ряд убывающих цифр: 98 765.

Вот наконец третья числовая пирамида, также требующая объяснения:

$$9 \times 9 + 7 = 88$$
$$98 \times 9 + 6 = 888$$
$$987 \times 9 + 5 = 8888$$
$$9876 \times 9 + 4 = 88888$$
$$98765 \times 9 + 3 = 888888$$
$$987654 \times 9 + 2 = 8888888$$
$$9876543 \times 9 + 1 = 88888888$$
$$98765432 \times 9 + 0 = 888888888$$

Эта пирамида является прямым следствием первых двух. Связь устанавливается очень легко. Из первой пирамиды мы знаем уже, что, например:

$$12\,345 \times 9 + 6 = 111\,111.$$

Умножив обе части на 8, имеем:

$$(12\,345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8) = 888\,888.$$

Но из второй пирамиды известно, что

$$12\,345 \times 8 + 5 = 98\,765, \text{ или } 12\,345 \times 8 = 98\,760.$$

Значит:

$$888\,888 = (12\,345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8) = (98\,760 \times 9) + 48 =$$
$$= (98\,760 \times 9) + (5 \times 9) + 3 = (98\,760 + 5) \times 9 + 3 = 98\,765 \times 9 + 3.$$

Вы убеждаетесь, что все эти числовые пирамиды не так уж загадочны, как кажутся с первого взгляда.

ДЕВЯТЬ ОДИНАКОВЫХ ЦИФР

Конечная строка первой из только что (см. стр. 85) рассмотренных пирамид

$$12\,345\,678 \times 9 + 9 = 111\,111\,111$$

представляет образчик целой группы интересных арифметических курьезов, собранной в нашем музее в следующую таблицу:

$$\begin{aligned}
12345679 \times 9 &= 111111111\\
12345679 \times 18 &= 222222222\\
12345679 \times 27 &= 333333333\\
12345679 \times 36 &= 444444444\\
12345679 \times 45 &= 555555555\\
12345679 \times 54 &= 666666666\\
12345679 \times 63 &= 777777777\\
12345679 \times 72 &= 888888888\\
12345679 \times 81 &= 999999999
\end{aligned}$$

Откуда такая закономерность в результатах? Примем во внимание, что

$$12\,345\,678 \times 9 + 9 = (12\,345\,678 + 1) \times 9 = 12\,345\,679 \times 9.$$

Поэтому

$$12\,345\,679 \times 9 = 111\,111\,111.$$

А отсюда прямо следует, что

$$\begin{aligned}
12\,345\,679 \times 9 \times 2 &= 222\,222\,222,\\
12\,345\,679 \times 9 \times 3 &= 333\,333\,333,\\
12\,345\,679 \times 9 \times 4 &= 444\,444\,444 \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

ЦИФРОВАЯ ЛЕСТНИЦА

Любопытно, что получится, если число 111 111 111, с которым мы сейчас имели дело, умножить само на себя? Заранее можно подозревать, что результат должен быть диковинный, но какой именно?

Если вы обладаете способностью четко рисовать в воображении ряды цифр, вам удастся найти интересующий нас результат, даже не прибегая к выкладкам на бумаге. В сущности, здесь дело сводится только к надлежащему расположению частных произведений, потому что умножать приходится все время лишь единицу на единицу — действие, могущее затруднить разве лишь фонвизинского Митрофанушку, размышлявшего о результате умножения „единожды один“. Сложение же частных произведений сводится к простому счету единиц[1]. Вот результат этого единственного в своем роде умножения (при выполнении которого не приходится ни разу прибегать к действию умножения):

$$\begin{array}{r}
111111111 \\
\underline{111111111} \\
111111111 \\
111111111 \\
111111111 \\
111111111 \\
111111111 \\
111111111 \\
111111111 \\
111111111 \\
\underline{111111111} \\
12345678987654321
\end{array}$$

Все девять цифр результата симметрично убывают от середины в обе стороны.

Те из читателей, которых утомило обозрение числовых диковинок, могут покинуть здесь галерею и перейти в следующие отделения, где показываются фокусы и выставлены числовые великаны и карлики; я хочу сказать: они могут прекратить чтение этой главы и обратиться к дальнейшим. Но кто желает познакомиться еще с несколькими интересными достопримечательностями мира чисел, приглашаю осмотреть со мною небольшой ряд ближайших витрин.

---

[1] В двоичной системе счисления, как мы уже объяснили, все умножения именно такого рода. На этом примере еще раз наглядно убеждаемся в преимуществах двоичной системы.

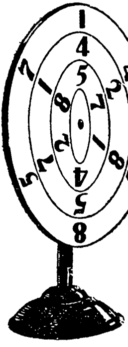
МАГИЧЕСКИЕ КОЛЬЦА

Что за странные кольца выставлены в следующей витрине нашей галереи? Перед нами три плоских кольца, вращающихся одно в другом.

На каждом кольце написаны шесть цифр в одном и том же порядке, именно — обозначено число 142857. Кольца обладают следующим удивительным свойством: как бы ни были они повернуты, мы при сложении двух написанных на них чисел, считая от любой цифры в направлении часовой стрелки, получим во всех случаях шестизначное число (если только результат вообще будет шестизначный), лишь немного подвинутое! В том положении, например, какое изображено на прилагаемом чертеже, мы получаем при сложении двух наружных колец:

$$\begin{array}{r} 142\,857 \\ +\ 428\,571 \\ \hline 571\,428 \end{array}$$

то-есть опять тот же ряд цифр: 142 857, только цифры 5 и 7 перенеслись из конца в начало.



Вращающиеся числовые кольца.

При другом расположении колец относительно друг друга имеем такие случаи:

$$\begin{array}{r} 285\,714 \\ +\ 571\,428 \\ \hline 857\,142 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 714\,285 \\ +\ 142\,857 \\ \hline 857\,142 \end{array} \text{ и т. п.}$$

Исключение составляет случай, когда в результате получается 999 999:

$$\begin{array}{r} 285\,714 \\ +\ 714\,285 \\ \hline 999\,999 \end{array}$$

(Причину других отступлений от указанного правила читатель поймет, когда дочитает эту статью до конца.)

Мало того. Тот же ряд цифр в той же последовательности получим и при вычитании чисел, написанных на кольцах.

Например:

$$\begin{array}{r} 428\,571 \\ -\,142\,857 \\ \hline 285\,714 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 571\,428 \\ -\,285\,714 \\ \hline 285\,714 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 714\,285 \\ -\,142\,857 \\ \hline 571\,428 \end{array}$$

Исключение составляет случай, когда приведены к совпадению одинаковые цифры; тогда, разумеется, разность равна нолю.

Но и это еще не все. Умножьте число 142 857 на 2, на 3, на 4, на 5 или на 6 — и вы получите снова то же число, лишь передвинутое, в круговом порядке, на одну или несколько цифр:

$$\begin{aligned} 142\,857 \times 2 &= 285\,714, \\ 142\,857 \times 3 &= 428\,571, \\ 142\,857 \times 4 &= 571\,428, \\ 142\,857 \times 5 &= 714\,285, \\ 142\,857 \times 6 &= 857\,142. \end{aligned}$$

Чем же все загадочные особенности нашего числа обусловлены?

Мы нападем на путь к разгадке, если продлим немного последнюю табличку и попробуем умножить наше число на 7: в результате получится 999 999. Значит, число 142 857 не что иное, как седьмая часть 999 999; и, следовательно, дробь $\frac{142\,857}{999\,999} = \frac{1}{7}$. Действительно, если станете превращать $^1/_7$ в десятичную дробь, вы получите:

$$1:7 = 0{,}142857\ldots \ \text{то-есть}\ {}^1/_7 = 0{,}(142857)$$

$$\begin{array}{l} 10 \\ \hline \quad 30 \\ \hline \quad\quad 20 \\ \hline \quad\quad\quad 60 \\ \hline \quad\quad\quad\quad 40 \\ \hline \quad\quad\quad\quad\quad 50 \\ \hline \quad\quad\quad\quad\quad\quad 1 \end{array}$$

Наше загадочное число есть период бесконечной периодической дроби, которая получается при превращении $^1/_7$ в десятичную. Становится понятным теперь, почему при удвоении, утроении и т. д. этого числа происходит лишь перестановка одной группы цифр на другое место. Ведь умножение этого числа на 2 делает его равным $^2/_7$ и, следовательно, равносильно превращению в десятичную дробь уже не $^1/_7$, а $^2/_7$. Начав же превращать дробь $^2/_7$ в десятичную, вы сразу заметите, что цифра 2 — один из тех остатков, которые у нас уже получались при превращении $^1/_7$; ясно, что должен повториться и прежний ряд цифр частного, но начнется он с другой цифры. Иными словами, должен получиться тот же период, но только несколько начальных цифр его очутятся на конце. То же самое произойдет и при умножении на 3, на 4, на 5 и на 6, то-есть на все числа, получающиеся в остатках. При умножении же на 7 мы должны получить единицу, или — что то же самое — 0,9999...

Любопытные результаты сложения и вычитания чисел на кольцах находят себе объяснение в том же факте, что 142 857 есть период дроби, равной $^1/_7$. В самом деле: что мы собственно делаем, поворачивая кольцо на несколько цифр? Переставляем группу цифр с начала строки на конец, то-есть согласно только что сказанному умножаем число 142 857 на 2, на 3, на 4 и т. д. Следовательно, все действия сложения или вычитания чисел, написанных на кольцах, сводятся к сложению или вычитанию дробей $^1/_7$, $^2/_7$, $^3/_7$ и т. д. В результате мы должны получить, конечно, несколько седьмых долей, то-есть опять-таки наш ряд цифр 142 857 в той или иной круговой перестановке. Отсюда надо исключить лишь случаи, когда складываются такие числа седьмых долей, которые в сумме дают единицу или больше 1.

Но и последние случаи исключаются не вполне: они дают результат, правда не тождественный с рассмотренными, но все же сходный с ними. Рассмотрим внимательнее, что должно получиться от умножения нашего загадочного числа на множитель больше 7, то-есть на 8, на 9 и т. д. Умножить 142 857, например, на 8 мы можем так: умножить сначала на 7 и к произведению (то-есть к 999 999) прибавить наше число:

$$142\,857 \times 8 = 142\,857 \times 7 + 142\,857 = 999\,999 + 142\,857 =$$
$$= 1\,000\,000 - 1 + 142\,857 = 1\,000\,000 + (142857 - 1).$$

Окончательный результат — 1 142 856 — отличается от умножаемого 142 857 только тем, что впереди стоит еще одна единица, а последняя цифра на единицу же уменьшена. По сходному правилу составляются произведения 142 857 на всякое другое число больше 7, как легко усмотреть из следующих строк:

$$142\,857 \times 8 = (142\,857 \times 7) + 142\,857 = 1\,142\,856,$$
$$142\,857 \times 9 = (142\,857 \times 7) + (142\,857 \times 2) = 1\,285\,713,$$
$$142\,857 \times 10 = (142\,857 \times 7) + (142\,857 \times 3) = 1\,428\,570,$$
$$142\,857 \times 16 = (142\,857 \times 7 \times 2) + (142\,857 \times 2) = 2\,285\,712,$$
$$142\,857 \times 39 = (142\,857 \times 7 \times 5) + (142\,857 \times 4) = 5\,571\,423.$$

Общее правило здесь такое: при умножении 142 857 на любой множитель нужно умножить лишь на остаток от деления множителя на 7; впереди этого произведения ставится число, показывающее, сколько семерок в множителе, и то же число вычитается из результата[1]. Пусть мы желаем умножить 142 857 на 88. Мно-

---

[1] Если множитель кратен 7, то результат равен числу 999 999, умноженному на число семерок в множителе; такое умножение легко выполнить в уме. Например, $142\,857 \times 28 = 999\,999 \times 4 = 4\,000\,000 - 4 = 3\,999\,996$.

житель 88 при делении на 7 дает в частном 12 и в остатке 4. Следовательно, результат умножения таков:

$$12\,571\,428 - 12 = 12\,571\,416.$$

От умножения 142 857 на 365 мы получим (так как 365 при делении на 7 дает в частном 52, а в остатке 1):

$$52\,142\,857 - 52 = 52\,142\,805.$$

Усвоив это простое правило и запомнив результаты умножения нашего диковинного числа на множители от 2 до 6 (что весьма нетрудно, нужно помнить лишь, с какой цифры они начинаются), вы можете изумлять непосвященных молниеносным умножением шестизначного числа. А чтобы не забыть этого удивительного числа, заметим, что оно произошло от $^1/_7$, или, что то же самое, от $^2/_{14}$; вот вам первые три цифры нашего числа: 142. Остальные три получаются вычитанием первых трех из 999:

$$\begin{array}{r} -\,999 \\ \mathbf{142}857 \\ \hline 857 \end{array}$$

Мы уже имели дело с такими числами — именно, когда знакомились со свойствами числа 999. Вспомнив сказанное там, мы сразу сообразим, что число 142 857 есть, очевидно, результат умножения 143 на 999:

$$142\,857 = 143 \times 999.$$

Но $143 = 13 \times 11$. Припомнив замеченное раньше о числе 1001, равном $7 \times 11 \times 13$, мы будем в состоянии, не выполняя действия, предсказать, что должно получиться от умножения $142\,857 \times 7$:

$$142\,857 \times 7 = 143 \times 999 \times 7 = 999 \times 11 \times 13 \times 7 =$$
$$= 999 \times 1001 = 999\,999$$

(все эти преобразования мы, конечно, можем проделать в уме).

Чисел, подобных тому, с которым мы познакомились, существует множество. Они составляют словно одно семейство, так как объединены общим происхождением — от превращения простых дробей в бесконечные десятичные. Но не всякий период десятичной дроби обладает рассмотренным выше любопытным свойством давать при умножении круговую перестановку цифр. Не вдаваясь в тонкости теории, отметим, что это имеет место только для тех дробей, число цифр периода которых на единицу меньше знаменателя соответствующей простой дроби. Так, например:

$^{1}/_{7}$	дает	в	периоде	6	цифр
$^{1}/_{17}$	„	„	„	16	„
$^{1}/_{19}$	„	„	„	18	„
$^{1}/_{23}$	„	„	„	22	„
$^{1}/_{29}$	„	„	„	28	„

Вы можете убедиться испытанием, что периоды дробей, получающихся от превращения $^{1}/_{17}$, $^{1}/_{19}$, $^{1}/_{23}$ и $^{1}/_{29}$ в десятичные, обладают теми же особенностями, как и рассмотренный нами период дроби $^{1}/_{7}$.

Например, от $^{1}/_{29}$ получаем число

0 344 827 586 206 896 551 724 137 931.

Если указанное сейчас условие (относительно чисел цифр периода) не соблюдено, то соответствующий период дает число, не принадлежащее к занимающей нас семье интересных чисел. Например, $^{1}/_{13}$ дает десятичную дробь с шестью (а не с 12) цифрами в периоде:

$$^{1}/_{13} = 0{,}076923.$$

Помножив на 2, получаем совершенно иное число:

$$^{2}/_{13} = 0{,}153846.$$

Почему? Потому что среди остатков от деления 1 : 13 не было числа 2. Различных остатков было столько, сколько цифр в периоде, то-есть 6; различных же множителей для дроби $^1/_{13}$ у нас 12; следовательно, не все множители будут среди остатков, а только 6. Легко убедиться, что эти множители следующие: 1, 3, 4, 9, 10, 12. Умножение на эти 6 чисел дает круговую перестановку ($076\,923 \times 3 = 230\,769$), на остальные — нет. Вот почему от $^1/_{13}$ получается число, лишь отчасти пригодное для „магического кольца“. То же надо сказать и о ряде других периодов.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ

$$100 = \left\{ \begin{array}{r} 24\,^3/_6 + 75\,^9/_{18} \\ 47\,^3/_6 + 52\,^9/_{18} \\ 74\,^3/_6 + 25\,^9/_{18} \\ 95\,^3/_7 + 4\,^{16}/_{28} \\ 98\,^3/_6 + 1\,^{27}/_{54} \\ 94\,^1/_2 + 5\,^{38}/_{76} \\ 1\,^6/_7 + 3 + 95\,^4/_{28} \\ 57\,^3/_6 + 42\,^9/_{18} \end{array} \right.$$

Каждая сумма состоит только из девяти разных цифр.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ФОКУСЫ БЕЗ ОБМАНА

ИСКУССТВО ИНДУССКОГО СЧЕТЧИКА

Арифметические фокусы — честные, добросовестные фокусы. Здесь не стремятся обмануть, не стараются усыпить внимание зрителя. Чтобы выполнить арифметический фокус, не нужны ни чудодейственная ловкость рук, ни изумительное проворство движений, ни какие-либо другие артистические способности, требующие иногда многолетних упражнений.

Весь секрет арифметического фокуса состоит в тщательном изучении и использовании любопытных свойств чисел, в близком знакомстве с их особенностями. Кто знает разгадку такого фокуса, тому все представляется простым и ясным; а для не знающего арифметики и самое обычное действие кажется уже чем-то вроде фокуса.

Было время, когда уменье выполнять даже обыкновенные арифметические действия над большими числами, знакомое теперь каждому школьнику, составляло искусство лишь немногих и казалось остальным какой-то сверхъестественной способностью. В древнеиндусской повести „Наль и Дамаянти“[1] находим отголосок такого взгляда на арифметические действия. Наль, умевший превосходно править лошадьми, вез однажды счетчика-виртуоза Ритуперна мимо развесистого дерева — Вибитаки.

„Вдруг он увидел вдали Вибитаку — ветвисто-густою
Сенью покрытое дерево. „Слушай, Вагука, — сказал он:
— Здесь на земле никто не имеет всезнанья; в искусстве
Править конями ты первый; зато мне далося искусство
Счета...“

И в доказательство своего искусства счетчик мгновенно сосчитал число листьев на ветвистой Вибитаке. Изумленный Наль просит Ритуперна открыть ему тайну его искусства, и тот соглашается.

„...Лишь только
Вымолвил слово свое Ритуперн, как у Наля открылись
Очи и он все ветви, плоды и листы Вибитаки
Разом мог перечесть...“

Секрет искусства состоял, как можно догадаться, в том, что непосредственный счет листьев, требующий много времени и терпения, заменялся счетом листьев одной лишь ветки и умножением этого числа на число веток каждого сука и далее — на число сучьев дерева (предполагая, что все сучья одинаково обросли ветками, а ветки — листьями).

Разгадка большинства арифметических фокусов столь же проста, как и секрет „фокуса“ Ритуперна. Стоит лишь узнать, в чем секрет фокуса, и вы сразу овладеваете искусством его выполнять, как овладел легендарный Наль изумительным искусством быстрого

---

[1] Русский перевод (вольный) Жуковского. Эпизод, о котором далее идет речь, описан в главе VIII этой повести.

счета. В основе каждого арифметического фокуса лежит какая-нибудь интересная особенность чисел, и потому знакомство с подобными фокусами не менее поучительно, чем занимательно.

НЕ ОТКРЫВАЯ КОШЕЛЬКОВ

Фокусник высыпает на стол кучу монет на сумму 3 руб. и предлагает вам задачу: разложить деньги по 9 кошелькам так, чтобы можно было уплатить любую сумму до 3 руб., не открывая кошельков.

Это может показаться совершенно невыполнимым. Не думайте, однако, что фокусник расставил вам ловушку из игры слов или неожиданного их толкования. Посмотрите: фокусник сам берется за дело. Разложив монеты по кошелькам и привязав к каждому ярлычок с обозначением вложенной суммы, он предлагает вам назначить любую сумму не выше 3 руб.

Вы называете, например, 2 руб. 69 коп.

Без малейшего промедления фокусник отбирает и подает вам 4 кошелька. Вы открываете их и находите:

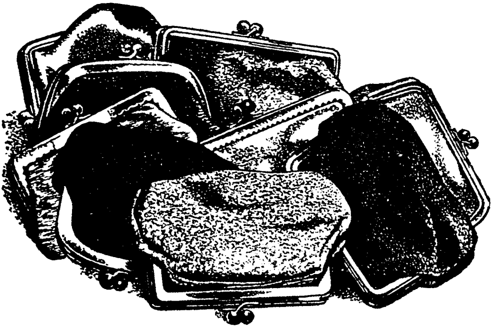
в одном	—	руб.	64	коп.
„ другом	—	„	45	„
„ третьем	1	„	28	„
„ четвертом	—	„	32	„
Итого	2	руб.	69	коп.

Вы готовы заподозрить фокусника в ловкой подмене кошельков и требуете повторения фокуса. Он пододвигает все кошельки к вам, и когда вы называете новую сумму — например, 1 руб., или 7 коп., или 2 руб. 93 коп., — немедленно указывает, какие из лежащих кошельков должны вы взять, чтобы составилась назначенная вами сумма. А именно:

Для 1 руб. — 6 кошельков (32 коп., 1 коп., 45 коп., 16 коп., 2 коп., 4 коп.).

Для 7 коп. — 3 кошелька (1 коп., 2 коп., 4 коп.).

Для 2 р. 93 к. — 6 кошельков (128 коп., 32 коп., 8 коп., 45 коп., 64 коп., 16 коп.).



Фокус с 9 кошельками.

Кошельки, по приказу фокусника, оказывается, всегда готовы составить любую названную сумму (до 3 руб.).

Чем это объяснить?

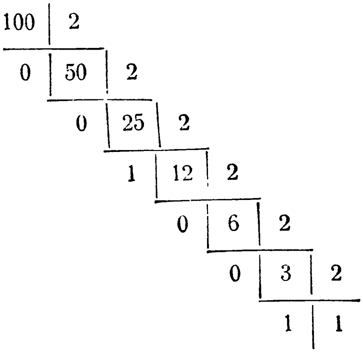
Секрет кроется в том, чтобы разложить монеты следующим образом: 1 коп., 2 коп., 4 коп., 8 коп., 16 коп., 32 коп., 64 коп. и 128 коп. и, наконец, в последний — остальные деньги, то-есть

$$300 - (1+2+4+8+16+32+64+128) = 300 - 255 = 45 \text{ (коп.)}.$$

Из первых 8 кошельков возможно, как нетрудно убедиться, составить любую сумму от 1 до 255 коп.; если же задается сумма бо́льшая, то пускают в дело последний кошелек, с 45 коп., а разницу составляют из первых 8 кошельков.

Вы можете проверить пригодность такой группировки чисел многочисленными пробами и убедиться, что из них можно действительно составить всякое число, не превышающее 300.

Но вас, вероятно, интересует и то, почему собственно ряд чисел 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 и т. д. обладает столь замечательным свойством. Это нетрудно понять, если вспомнить, что числа нашего ряда представляют степени 2: 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 и т. д.[1], и, следовательно, их можно рассматривать как разряды двоичной системы счисления. А так как всякое число можно написать по двоичной системе, то, значит, и *всякое число возможно составить из суммы степеней* 2, то-есть из чисел ряда 1, 2, 4, 8, 16 и т. д. И когда вы подбираете кошельки, чтобы составить из их содержимого заданное число, вы, в сущности, выражаете заданное число в двоичной системе счисления. Например, число 100 легко составить, если изобразить его в двоичной системе:



$$\begin{array}{lccccccc} 100 = & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 64\ \cdot & 32 & (16) & (8) & 4 & (2) & (1) \end{array}$$

$$100 = 64 + 32 + 4$$

---

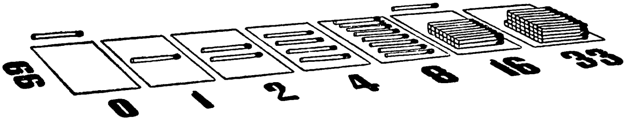
[1] Проходившие алгебру знают, что число 1 можно рассматривать, как 2 в нулевой степени.

Напомним, что в двоичной системе на первом месте справа стоят единицы, на втором — двойки, на третьем — четверки, на четвертом — восьмерки и т. д.

УГАДАТЬ ЧИСЛО СПИЧЕК

Свойством двоичной системы можно воспользоваться и для следующего фокуса. Вы предлагаете кому-нибудь взять неполный коробок со спичками, положить на стол, а рядом положить семь бумажных квадратиков. Затем просите в вашем отсутствии проделать следующее: оставив половину спичек в коробке, перенести другую половину на ближайшую бумажку; если число спичек нечетное, то излишнюю спичку положить рядом с бумажкой, налево от нее. Спички, очутившиеся на бумажке, надо (не трогая лежащей рядом) разделить на две равные части: одну половину положить в коробку, другую — переложить на следующую бумажку; в случае нечетного числа остающуюся спичку положить рядом со второй бумажкой. Далее надо поступать таким же образом, возвращая всякий раз половину спичек обратно в коробку, а другую половину перекладывая на следующую бумажку, не забывая при нечетном числе спичек класть одну спичку рядом.

В конце концов все спички, кроме одиночных, лежащих рядом с бумажками, возвратятся в коробок (см. рисунок).



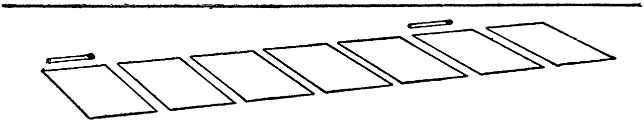
Отгадывание числа спичек:
последовательные действия загадывающего.

Когда это сделано, вы являетесь в комнату и, бросив взгляд на пустые бумажки, называете число спичек во взятой коробке.

Как можно по пустым бумажкам и случайным единичным спичкам догадаться о первоначальном числе спичек в коробке?

Эти пустые бумажки в данном случае очень красноречивы: по ним и по одиночным спичкам можно буквально прочесть искомое число, потому что оно написано на столе — в двоичной системе счисления. Поясним это на примере.

Пусть число спичек было 66. Последовательные операции с ними и окончательный вид бумажек показаны на схемах рисунков.



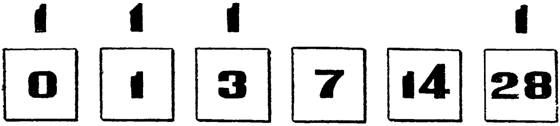
Продолжение фокуса: окончательный вид бумажек.

Нетрудно сообразить, что проделанные со спичками операции, в сущности, те же самые, какие мы выполнили бы, если бы хотели выразить число спичек в коробке по двоичной системе счисления; окончательная же схема прямо изобразит это число в двоичной системе, если пустые бумажки принять за ноли, а бумажки, отмеченные сбоку спичкой,— за единицы. Читая схему слева направо, получаем:

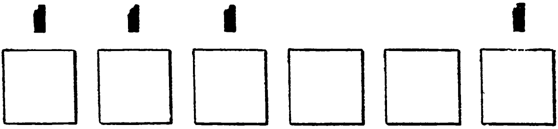
1 0 0 0 0 1 0
64 (32) (16) (8) (4) 2 (1)

в десятичной же системе: $64+2=66$.

Если бы было 57 спичек, мы имели бы иные схемы, показанные на следующих рисунках.



Случай отгадывания с другим использованным числом: начало фокуса.



Конец фокуса.

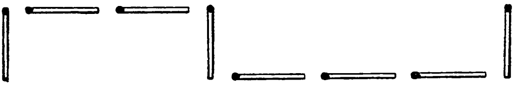
Искомое число, написанное по двоичной системе:

1	1	1	0	0	1
32	16	8	(4)	(2)	1

а в десятичной: $32 + 16 + 8 + 1 = 57$.

„ЧТЕНИЕ МЫСЛЕЙ“ ПО СПИЧКАМ

Третье видоизменение того же фокуса представляет собой своеобразный способ отгадывания задуманного числа по спичкам. Загадавший должен мысленно делить задуманное число пополам, полученную половину — опять пополам и т. д. (от нечетного числа отбрасывая единицу), и при каждом делении класть перед собой спичку, направленную *вдоль* стола, если делится число четное, и *поперек*, если приходится делить нечетное. К концу операции получается фигура вроде показанной на рисунке.

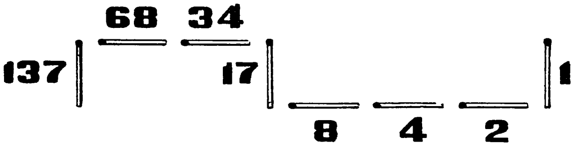


Отгадывание задуманного числа по спичкам: что делает загадывающий.

Вы всматриваетесь в эту фигуру и безошибочно называете задуманное число: 137.

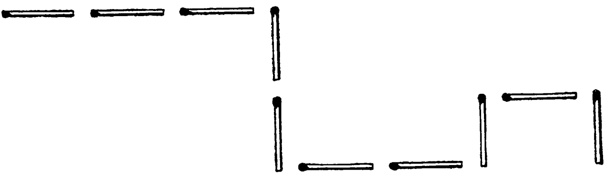
Как вы узнаете его?

Способ станет ясен сам собой, если в выбранном примере (137) последовательно обозначить возле каждой спички то число, при делении которого она была положена (см. рисунок).



Секрет фокуса: что делает отгадчик.

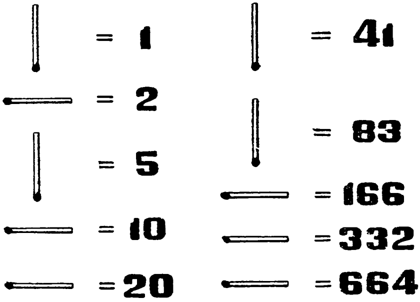
Теперь понятно, что последняя спичка во всех случаях означает число 1, и не составляет труда, восходя от нее к предшествующим делениям, добраться до первоначально задуманного числа. Например, по фигуре рисунка вы можете вычислить, что задумано было число 664. В самом деле, выполняя последовательно удвоения (начиная с конца) и не забывая прибавлять, где надо, единицу, получаем задуманное (см. рисунок).



Какое число здесь изображено?

Таким образом, пользуясь спичками, вы прослеживаете ход чужих мыслей, восстанавливаете всю цепь выкладок.

Тот же результат мы можем получить иначе, сообразив, что лежащая спичка должна соответствовать в двоичной системе нолю (деление на 2 без остатка), а стоящая — единице.



Ответ на вопрос предыдущего рисунка.

Таким образом, в первом примере мы имеем (читая справа налево) число:

1	0	0	0	1	0	0	1
128	(64)	(32)	(16)	8	(4)	(2)	1

или в десятичной системе:

$$128 + 8 + 1 = 137.$$

А во втором примере задуманное число изображается по двоичной системе так:

1	0	1	0	0	1	1	0	0	0
512	(256)	128	(64)	(32)	16	8	(4)	(2)	(1)

или по десятичной системе:

$$512 + 128 + 16 + 8 = 664.$$

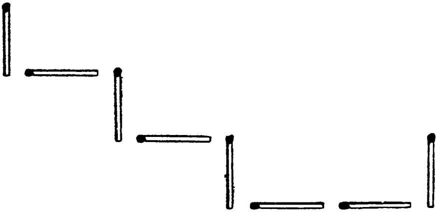
Попробуйте решить, какое число задумано, если получилась фигура рисунка на стр. 107.

Решение будет такое.

Число „10010101“ в двоичной системе соответствует в десятичной:

$$128 + 16 + 4 + 1 = 149.$$

Необходимо заметить, что получаемая при последнем делении единица также должна быть отмечаема стоящей спичкой.



Какое число изображено этой фигурой?

ИДЕАЛЬНЫЙ РАЗНОВЕС

У некоторых читателей, вероятно, возник уже вопрос, почему для выполнения описанных раньше опытов мы пользуемся именно двоичной системой? Ведь каждое число можно изобразить в любой системе, между прочим и в десятичной. Чем же объясняется предпочтение здесь двоичной?

Объясняется оно тем, что в этой системе, кроме ноля, употребляется всего одна цифра — единица, а следовательно, число составляется из различных степеней 2, взятых только по одному разу. Если бы в фокусе с кошельками мы распределили деньги, например, по пятеричной системе, то могли бы составить, не раскрывая кошельков, любую сумму лишь в том случае, когда каждый из кошельков повторялся бы у нас не менее 4 раз (в пятеричной системе употребляются ведь, кроме ноля, четыре цифры).

Впрочем, бывают случаи, когда для подобных надобностей удобнее пользоваться не двоичной, а троичной системой, несколько видоизмененной. Сюда относится знаменитая старинная „задача о гирях“, которая может послужить сюжетом и для арифметического фокуса.

Представьте, что вам предложили придумать набор из четырех гирь, с помощью которых возможно было бы отвесить любое целое число килограммов, от 1 до 40. Двоичная система подсказывает вам набор:

1 *кг*, 2 *кг*, 4 *кг*, 8 *кг*, 16 *кг*,

которым можно отвешивать все грузы от 1 до 31 *кг*. Но это, очевидно, не удовлетворяет требуемым условиям ни по числу гирь, ни по предельному грузу (31 *кг* вместо 40). С другой стороны, вы не использовали здесь возможности класть гири не только на одну чашку весов, но и на две, то-есть обходиться не только суммой гирь, но и их разностью. Последнее дает так много разнообразных комбинаций, что вы совершенно теряетесь в поисках, не умея уложить их в какую-либо систему.

Если вам не посчастливится напасть на правильный путь, вы готовы будете даже сомневаться вообще в разрешимости задачи столь малым числом гирь, как четыре.

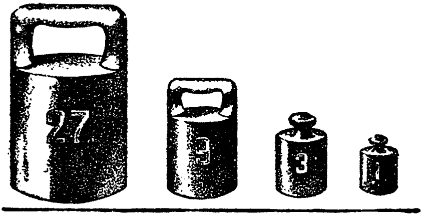
Посвященный выходит из этого затруднения с волшебной простотой, намечая следующие четыре гири:

1 *кг*, 3 *кг*, 9 *кг*, 27 *кг*.

Любое целое число килограммов, до 40 *кг*, вы можете отвесить такими гирями, кладя их то на одну, то на обе чашки весов. Не приводим примеров, потому что каждый легко может сам убедиться в полной пригодности такого набора гирь для нашей цели. Остановимся лучше на том, почему именно указанный ряд обладает этим свойством. Вероятно, читатели уже заметили, что числа эти — ряд степеней[1] числа 3:

$$3^0, 3^1, 3^2, 3^3.$$

Это значит, что мы обращаемся здесь к услугам троичной системы счисления. Гири — цифры этой троичной системы. Но как воспользоваться ею, когда требуемый вес получается в виде разности двух гирь? И как избегнуть необходимости обращаться к удвоению гирь (в троичной системе ведь, кроме ноля, употребляются две цифры: 1 и 2)?



Набор гирь, с помощью которых можно взвесить любой груз от 1 до 40 *кг*.

То и другое достигается введением „отрицательных“ цифр. Дело сводится попросту к тому, что вместо цифры 2 употребляют 3 — 1, то-есть единицу высшего разряда, от которой отнимается одна единица низшего. Например, число 2 в нашей видоизмененной троичной системе обозначается не 2, а $1\overline{1}$, где знак минус над цифрой единиц означает, что единица эта не прибавляется, а отнимается. Точно так же число 5 изобразится не 12, а $11\overline{1}$ (то-есть $9-3-1=5$).

---

[1] Единицу можно рассматривать как нулевую степень 3 (вообще — как нулевую степень любого числа).

Теперь ясно, что если любое число можно изобразить в троичной системе с помощью ноля (то-есть знака отсутствия числа) и одной только цифры, именно прибавляемой или отнимаемой единицы, то из чисел 1, 3, 9, 27 можно, складывая или вычитая их, составить все числа от 1 до 40. Мы как бы пишем все эти числа, употребляя гири вместо цифр. Случай сложения отвечает при взвешивании случаю, когда гири помещаются все на одну чашку, а случай вычитания — когда часть гирь кладется на чашку с товаром и, следовательно, вес ее отнимается от веса остальных гирь. Ноль соответствует отсутствию гири.

Как известно, система эта на практике не употребляется. Всюду в мире, где введена метрическая система мер, применяется набор в 1, 2, 2, 5 единиц, а не 1, 3, 9, 27, хотя первым можно отвешивать грузы только до 10 единиц, а вторым — до 40. Не применялся набор 1, 3, 9, 27 и тогда, когда метрическая система еще не была введена. В чем же причина отказа на практике от этого, казалось бы, совершенного разновеса?

Причина кроется в том, что идеальный разновес удобен лишь на бумаге, на деле же пользоваться им весьма хлопотливо. Если бы приходилось только отвешивать заданное число весовых единиц — например, отвесить 400 *г* масла или 2500 *г* сахару,— то системой гирь в 100, 300, 900, 2700 можно было бы на практике пользоваться (хотя и тут приходилось бы каждый раз долго подыскивать соответствующую комбинацию). Но когда приходится определять, сколько весит данный товар, то подобный разновес оказывается крайне неудобным: здесь нередко, ради прибавления к поставленным гирям одной единицы, пришлось бы производить полную замену прежней комбинации другой, новой. Отвешивание становится при таких условиях делом крайне медленным и притом утомительным.

Не всякий быстро сообразит, что, например, вес 19 *кг* получится, если на одну чашку поставить гири в 27 *кг* и 1 *кг*, а на другую 9 *кг*; вес 20 *кг* — если на одну чашку поставить гири в 27 *кг* и 3 *кг*, а на другую — 9 *кг* и 1 *кг*. При каждом отвешивании приходилось бы решать подобные головоломки. Разновес 1, 2, 2, 5 таких затруднений не доставляет.

ПРЕДСКАЗАТЬ СУММУ НЕНАПИСАННЫХ ЧИСЕЛ

Что можно сказать о человеке, который напишет сумму раньше, чем ему будут названы все слагаемые?

Это, конечно, фокус, и выполняется он в таком виде. Отгадчик предлагает вам написать какое-нибудь многозначное число по вашему выбору. Бросив взгляд на это первое слагаемое, отгадчик пишет на бумажке сумму всей будущей колонны слагаемых и передает вам на хранение. После этого он просит вас (или кого-нибудь из присутствующих) написать еще одно слагаемое — опять какое угодно. А сам затем быстро пишет третье слагаемое. Вы складываете все три написанных числа — и получается как раз тот результат, который заранее был написан отгадчиком на спрятанной у вас бумажке.

Если, например, вы написали в первый раз 83 267, то отгадчик пишет будущую сумму 183 266. Затем вы пишете, допустим, 27 935, а отгадчик приписывает третье слагаемое 72 064:

I	Вы:	83 267
III	Вы:	27 935
IV	Отгадчик:	72 064
II	Сумма	183 266

Получается в точности предсказанная сумма, хотя отгадчик не мог знать, каково будет второе слагаемое. Отгадчик может предсказать также сумму пяти или семи слагаемых, но тогда он сам пишет два или три из них. Никакой подмены бумажки с результатом здесь заподозрить вы не можете, так как она до последнего момента хранится в вашем собственном кармане. Очевидно, отгадчик пользуется каким-то неизвестным вам свойством чисел. Каким?

Он пользуется тем, что от прибавления, скажем, к пятизначному числу числа из 5 девяток (99 999) это число увеличивается на 100 000 — 1, то-есть впереди него появляется единица, а последняя цифра уменьшается на единицу. Например:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 83\,267 \\ 99\,999 \end{array} \\ \hline 183\,266 \end{array}$$

Эту сумму, то-есть сумму написанного вами числа и 99 999, отгадчик и пишет на бумажке как будущий результат сложения. А чтобы результат оправдался, он, увидев ваше второе слагаемое, выбирает свое, третье слагаемое так, чтобы вместе со вторым оно составило 99 999, то-есть вычитает каждую цифру второго слагаемого из 9. Эти операции вы легко можете теперь проследить на предыдущем примере, а также и на следующих

I . . . . Вы: 379 264
III . . . . Вы: 4 873
IV . . . . . . Отгадчик: 995 126
II . . . . Сумма 1 379 263

I . . . . Вы: 9 035
III . . . . Вы: 5 669
IV . . . . . . Отгадчик: 4 330
II . . . . Сумма 19 034

Легко усмотреть, что вы сильно затрудните отгадчика, если второе ваше слагаемое будет заключать больше цифр, чем первое: отгадчик не сможет написать слагаемое, которое уменьшит второе число для оправдания предсказанного слишком малого результата. Поэтому опытный отгадчик предусмотрительно ограничивает свободу выбора этим условием.

Фокус выходит внушительнее, когда в придумывании слагаемых участвуют несколько лиц. После первого же слагаемого — например, 437 692 — отгадчик уже предсказывает сумму всех пяти чисел, именно записывает 2 437 690 (здесь будет добавлено дважды 999 999, то-есть 2 000 000 — 2). Дальнейшее ясно из схемы:

I . . . . Вы написали: 437 692
III . . . Другой написал: 822 541
V . . . Третий написал: 263 009
IV . . Отгадчик добавил: 177 458
VI „ „ 736 990
II Отгадчик предсказал: 2 437 690

Еще пример:

I . . . . . Вы написали: 7 400
III . . . Другой написал: 4 732
V . . . Третий написал: 9 000
IV . . .Отгадчик добавил: 5 267
VI . . . „ „ 999
II Отгадчик предсказал: 27 398

Читателям небезинтересно будет теперь познакомиться с тем, как описан тот же фокус советским писателем Шишковым в его романе „Странники“:

„Иван Петрович вырвал из блокнота страничку, подал мальчонке, спросил:

— Карандаш есть?.. Пиши любое число.

Мальчонка написал. Иван Петрович мельком взглянул на это число, написал на отдельном клочке бумаги свое какое-то число, сунул бумажку в солому и прикрыл шляпой.

— Пиши под ним другое. Написал?.. Теперь я сам напишу третье. Теперь все три числа складывай. Только тщательней, не ври.

Через две минуты был готов проверенный ответ. Инженер Вошкин (прозвище мальчика. — *Я. П.*) подал свои выкладки:

$$\begin{array}{r} 46\,853 \\ +\,21\,398 \\ 78\,601 \\ \hline 146\,852 \end{array}$$

— Сто сорок шесть тысяч восемьсот пятьдесят два, Иван Петрович.

— Долго считаешь. А у меня — вот он ответ. Я уже знал его, когда ты еще первое число написал. Вот. Тяни из-под шляпы.

Мальчонка выхватил бумажку. Там значилось: „146 852“.

В романе фокус оставляется неразъясненным. Но вам, конечно, вполне понятна его несложная арифметическая основа.

МНИМАЯ НЕОЖИДАННОСТЬ

В 1916 году, в разгар империалистической войны, некоторые газеты нейтральной Швейцарии занимались арифметическим „гаданием“ о... грядущей судьбе императоров Германии и Австрии. „Пророки“ складывали следующие столбцы чисел:

Для Вильгельма II:

Год рождения	1859
Год вступления на престол	1888
Число лет царствования	28
Возраст	57
Сумма	3832

Для Франца-Иосифа:

Год рождения	1830
Год вступления на престол	1848
Число лет царствования	68
Возраст	86
Сумма	3832

В совпадении сумм „пророки“ видели мрачное предзнаменование для коронованных особ, и так как каждый итог представлял собой удвоенный 1916 год, то обоим императорам предрекали гибель именно в этом году.

Между тем совпадение результатов с математической стороны не является неожиданным. Стоит немного изменить порядок слагаемых — и станет понятно, почему они дают в итоге удвоенный 1916 год. В самом деле, разместим слагаемые так:

год рождения,
возраст,
год вступления на престол,
число лет царствования.

Что должно получиться, если к году рождения прибавить возраст? Разумеется, дата того года, когда производится вычисление. Точно так же, если к году вступления на престол прибавить число лет царствования, получится опять год, когда производится расчет. Ясно, что итог сложения четырех наших слагаемых может быть не чем иным, как удвоенным годом выполнения расчета. Очевидно, судьба императоров абсолютно не зависит от подобной арифметики...

Так как о сказанном выше не все догадываются, то можно воспользоваться этим для забавного арифметического фокуса. Предложите кому-нибудь написать тайно от вас четыре числа:

год рождения,
год поступления в школу (на завод и т. п.),
возраст,
число лет обучения в школе (работы на заводе и т. п.).

Вы беретесь отгадать сумму этих чисел, хотя ни одно из них вам неизвестно. Для этого вы удваиваете год выполнения фокуса и объявляете итог. (Если, например, фокус показывается в 1954 году, то сумма — 3908.)

Чтобы иметь возможность, не обнаруживая секрета, с успехом проделывать этот фокус несколько раз подряд, вы заставляете слушателя проводить над суммой какие-нибудь арифметические действия, маскируя этим свой прием.

МГНОВЕННОЕ ДЕЛЕНИЕ

Из многочисленных разновидностей фокусов этого рода опишем один, основанный на знакомом уже нам свойстве множителя, состоящего из ряда одних девяток; когда умножают на него число со столькими же цифрами, получается результат, состоящий из двух половин: первая — это умножаемое число, уменьшенное на единицу; вторая — результат вычитания первой половины из множителя. Например: $247 \times 999 = 246\,753$; $1372 \times 9999 = 13\,718\,628$ и т. д. Причину легко усмотреть из следующей строки:

$$247 \times 999 = 247 \times (1000 - 1) = 247\,000 - 247 = 246\,999 - 246.$$

Пользуясь этим, вы предлагаете группе товарищей произвести деление многозначных чисел: одному — 68 933 106 : 6894, другому — 8 765 112 348 : 9999, третьему—543 456 : 544, четвертому—12 948 705 : 1295 и т. д., а сами беретесь обогнать их всех, выполняя те же задачи. И прежде чем они успеют приняться за дело, вы уже вручаете каждому бумажку с полученным вами безошибочным результатом деления: первому — 9999, второму — 87 652, третьему — 999, четвертому — 9999.

Вы можете сами придумать по указанному образцу ряд других способов поражать непосвященных мгновенным выполнением деления: для этого воспользуйтесь некоторыми свойствами тех чисел, которые помещены в „Галерее числовых диковинок“.

ЛЮБИМАЯ ЦИФРА

Попросите кого-нибудь сообщить вам любимую его цифру. Допустим, вам назвали цифру 6.

— Вот удивительно! — восклицаете вы. — Да ведь это как раз самая замечательная из всех значащих цифр.

— Чем же она замечательна? — осведомляется заинтересованный собеседник.

— Вот посмотрите: умножьте вашу любимую цифру на число значащих цифр, то-есть на 9, и полученное число (54) подпишите множителем под числом 12 345 679:

$$\begin{array}{r}12345679\\ \times\quad 54\\ \hline\end{array}$$

Что получится в произведении?

Ваш собеседник выполняет умножение — и с изумлением получает результат, состоящий сплошь из его любимых цифр: 666 666 666.

— Видите, какой у вас тонкий арифметический вкус, — заканчиваете вы. — Вы сумели избрать из всех цифр как раз ту, которая обладает столь замечательным свойством!

Однако в чем тут дело?

Точно такой же изысканный вкус оказался бы у вашего собеседника, если бы он избрал какую угодно другую из девяти значащих цифр, потому что каждая из них обладает тем же свойством:

$$\begin{array}{r}12345679\\ \times 4 \times 9\\ \hline 444444444\end{array}\qquad\begin{array}{r}12345679\\ \times 7 \times 9\\ \hline 777777777\end{array}\qquad\begin{array}{r}12345679\\ \times 9 \times 9\\ \hline 999999999\end{array}$$

Почему это так, вы сообразите, если припомните то, что говорилось о числе 12 345 679 в „Галерее числовых диковинок“.

УГАДАТЬ ДАТУ РОЖДЕНИЯ

Фокусы, относящиеся к этой категории, могут быть изменяемы на разные лады.

Опишу один из видов этого фокуса, довольно сложный, но именно потому и производящий сильное впечатление.

Допустим, что вы родились 18 мая и что вам теперь 23 полных года. Я, конечно, не знаю ни даты вашего рождения, ни вашего возраста. Тем не менее я берусь отгадать то и другое, заставив вас проделать лишь некоторый ряд вычислений.

А именно: порядковый номер месяца (май, 5-й месяц) я прошу вас умножить на 100, прибавить к произведению число месяца (18), сумму удвоить, к результату прибавить 8, полученное число умножить на 5, к произведению прибавить 4, помножить результат на 10, прибавить 4 и к полученному числу прибавить ваш возраст (23).

Когда вы все это проделаете, вы сообщаете мне окончательный результат вычислений. Я вычитаю из него 444, а разность разбиваю на грани, справа налево, по две цифры в каждой: получаю сразу как месяц и число вашего рождения, так и ваш возраст.

Действительно. Проделаем последовательно все указанные вычисления:

$$\begin{array}{rcrcr}
5 & \times & 100 & = & 500 \\
500 & + & 18 & = & 518 \\
518 & \times & 2 & = & 1\,036 \\
1\,036 & + & 8 & = & 1\,044 \\
1\,044 & \times & 5 & = & 5\,220 \\
5\,220 & + & 4 & = & 5\,224 \\
5\,224 & \times & 10 & = & 52\,240 \\
52\,240 & + & 4 & = & 52\,244 \\
52\,244 & + & 23 & = & 52\,267
\end{array}$$

Произведя вычитание 52 267 — 444, получаем число 51 823.

Теперь разобьем это число на грани, справа налево, по две цифры в каждой. Имеем:

$$5 - 18 - 23,$$

то-есть 5-го месяца (мая), числа 18; возраст 23 года.

Почему же так получилось?

Секрет наш легко понять из рассмотрения следующего равенства:

$$\{[(100m + t) \times 2 + 8] \times 5 + 4\} \times 10 + 4 + n - 444 = \\ = 10\,000m + 100t + n.$$

Здесь буква m обозначает порядковый номер месяца, t -- число месяца, n — возраст. Левая часть равенства выражает все последовательно произведенные вами действия, а правая — то, что должно получиться, если раскрыть скобки и проделать возможные упрощения.

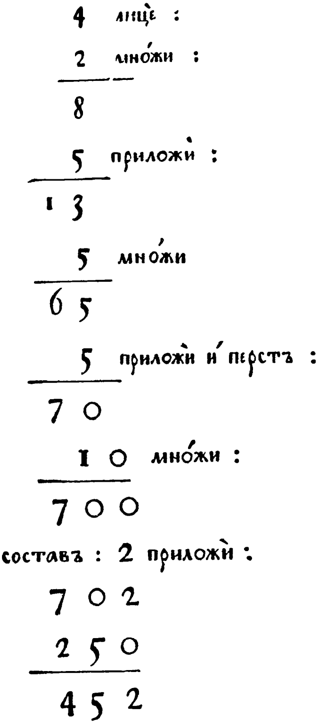
В выражении $10\,000m + 100t + n$ ни m, ни t, ни n не могут быть более чем двузначными числами; поэтому число, получающееся в результате, всегда должно при делении на грани, по две цифры в каждой, расчлениться на три части, выраженные искомыми числами m, t и n.

Предоставляем изобретательности читателя придумать видоизменения фокуса, то-есть другие комбинации действий, дающие подобный же результат.

ОДНО ИЗ „УТЕШНЫХ ДЕЙСТВИЙ“ МАГНИЦКОГО

Предлагаю читателю раскрыть также секрет следующего незамысловатого фокуса, который описан еще в „Арифметике“ Магницкого в главе: „Об утешных некиих действиях, через арифметику употребляемых“.

Пусть кто-либо задумает какое-нибудь число, относящееся к деньгам, к дням, к часам или к „каковойлибо иной числимой вещи". Остановимся на примере перстня, надетого на 2-й сустав мизинца (то-есть 5-го пальца) 4-го из 8 человек. Когда в это общество является отгадчик, его спрашивают: у кого из 8 человек (обозначенных номерами от 1 до 8), на каком пальце и на котором суставе находится перстень?



4 лицѐ :
2 мно́жи :
8
5 приложи̇ :
13
5 мно́жи
65
5 прило́жи и́ пе́рстъ :
70
10 мно́жи :
700
составъ : 2 прило́жи :
702
250
452

Математический фокус из „Арифметики" Л. Магницкого, 1703 год.

„Он же рече: кто-либо от вас умножи оного, который взял через 2, и к тому приложи 5, потом паки (снова) умножи через 5, также приложи перст на нем же есть перстень (то-есть к полученному прибавь номер пальца с перстнем). А потом умножи чрез 10 и приложи сустав на нем же перстень взложен, и от сих произведенное число скажи им, по немуже искомое получиши.

Они же твориша (поступили) якоже повеле им, умножаху четвертого человека, который взял перстень, и прочая вся, яже велеша им; якоже явлено есть (см. выкладки); из всего собрания пришло ему число 702, из него же он вычитал 250, осталось 452, то-есть 4-й человек, 5-й палец, 2-й сустав".

Не надо удивляться, что этот арифметический фокус был известен еще 200 лет назад: задачи совершенно подобного же рода я нашел в одном из первых сборников математических развлечений, именно у Баше-де-Мезирьяка, в его книге „Занимательные и приятные числовые задачи“, вышедшей в 1612 году; а туда она попала из сочинения Леонарда Пизано (1202 год). Нужно вообще заметить, что большая часть математических игр, головоломок и развлечений, которые в ходу в настоящее время, очень древнего происхождения.

ОТГАДЫВАНИЕ ЧИСЕЛ

В заключение, ничего у вас не спрашивая, я отгадаю результат, который вы получите в итоге выкладок над задуманным вами числом.

Задумайте любую цифру, кроме ноля. Умножьте ее на 37. Полученное умножьте на 3. Последнюю цифру произведения зачеркните, а оставшееся число разделите на первоначально задуманную цифру; остатка не будет.

Я могу сказать вам, какое число вы получили, хотя все это я написал задолго до того, как вы приступили к чтению книги.

У вас получилось число 11.

Второй раз проделаем фокус на иной лад. Задумайте двузначное число. Припишите к нему справа то же число еще раз. Полученное четырехзначное число разделите на то, которое вы первоначально задумали: деление выполнится нацело. Все цифры частного сложите.

У вас получилось 2.

Если не так, то проверьте внимательно свои вычисления и убедитесь, что ошиблись вы, а не я.

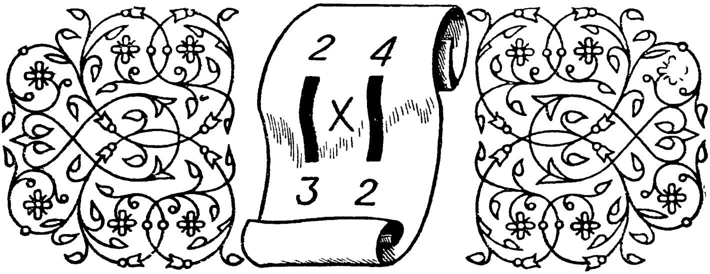
В чем разгадка этих фокусов?

Разгадка.

Наш читатель теперь достаточно уже опытен в разгадывании фокусов и не потребует от меня долгих объяснений. В первом опыте отгадывания задуманное число умножалось сначала на 37, потом на 3. Но $37 \times 3 = 111$, а умножить цифру 111 — значит составить число из трех таких же одинаковых цифр (например, $4 \times 37 \times 3 = 444$). Что мы проделали далее? Мы зачеркнули последнюю цифру и, следовательно, получили число из двух одинаковых цифр (44), которое, конечно, должно делиться на задуманную цифру и дать в частном 11.

Во втором опыте задуманное двузначное число мы писали дважды кряду — например, задумав 29, писали 2929. Это все равно, что умножить задуманное число на 101 (в самом деле, $29 \times 101 = 2929$). Раз я это знаю, я могу с уверенностью предвидеть, что от деления такого четырехзначного числа на задуманное число получится 101 и что, следовательно, сумма цифр частного $(1 + 0 + 1)$ равна 2.

Как видите, отгадывание основано на свойствах чисел 111 и 101; мы вправе поместить оба эти числа в нашу арифметическую кунсткамеру.



ГЛАВА СЕДЬМАЯ

БЫСТРЫЙ СЧЕТ

ПРИЕМЫ УСКОРЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

Одним из приемов ускоренного умножения является прием перекрестного умножения, весьма удобный при действии с двузначными числами. Способ не нов: он восходит к грекам и индусам и в старину назывался „способом молнии“ или „умножением крестиком“.

Пусть требуется перемножить 24×32. Мысленно располагаем числа по следующей схеме, одно под другим:

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 4 \\ | & \times & | \\ 3 & & 2 \end{array}$$

Теперь последовательно производим следующие действия:

1) $4 \times 2 = 8$ — это последняя цифра результата;

2) $2 \times 2 = 4$; $4 \times 3 = 12$; $4 + 12 = 16$; 6 — предпоследняя цифра результата; единицу запоминаем;

3) $2\times 3=6$ да еще удержанная в уме единица, имеем 7 — это первая цифра результата.

Получаем все цифры произведения: 7, 6, 8 — 768.

После непродолжительного упражнения прием этот усваивается очень легко.

Другой способ, состоящий в употреблении так называемых „дополнений“, удобно применяется в тех случаях, когда перемножаемые числа близки к 100.

Предположим, что требуется перемножить 92×96. „Дополнение“ для 92 до 100 будет 8, для 96 — 4. Действие производят по следующей схеме:

множители: 92 и 96,
дополнения: 8 и 4.

Первые две цифры результата получаются простым вычитанием из множителя „дополнения“ множимого или наоборот: то-есть из 92 вычитают 4 или из 96 — 8. В том и другом случае имеем 88; к этому числу приписывают произведение „дополнений“: $8\times 4=32$. Получаем результат 8832.

Что полученный результат должен быть верен, наглядно видно из следующих преобразований:

$$92\times 96=\left\{\begin{array}{lcl} 88\times 96=88\,(100-4)= & & 88\times 100-88\times 4\\ \ \ 4\times 96=\ \ 4\ \ (88+8)= & & \ \ 4\times\ \ 8+88\times 4\\ \hline 92\times 96\qquad\qquad = & & \qquad 8832+0\end{array}\right.$$

Еще пример — требуется перемножить 78 на 77:

множители: 78 и 77,
дополнения: 22 и 23.
$78\ -23\ =55,$
$22\ \times 23\ =506,$
$5500+506=6006.$

ДЛЯ ОБИХОДНЫХ РАСЧЕТОВ

Существует огромное множество приемов ускоренного выполнения арифметических действий — приемов, предназначаемых для обиходных вычислений. Составилась бы целая книга, если задаться целью описать хотя бы только главнейшие из них. Ограничусь поэтому лишь несколькими примерами из числа наиболее удобоприменимых.

В практике технических и торговых вычислений нередки случаи, когда приходится складывать столбцы чисел, близких друг к другу по величине. Например:

$$\left.\begin{array}{r}43\\38\\39\\45\\41\\39\\42\end{array}\right\}$$

Сложение таких чисел значительно упрощается, если воспользоваться следующим приемом, сущность которого легко понять:

$$\left.\begin{array}{l}43=40+3\\38=40-2\\39=40-1\\45=40+5\\41=40+1\\39=40-1\\42=40+2\end{array}\right\}\begin{array}{l}40\times7=280\\3-2-1+5+1-1+2=7\\280+7=287\end{array}$$

Точно так же находим сумму:

$$\left.\begin{array}{l}752=750+2\\753=750+3\\746=750-4\\754=750+4\\745=750-5\\751=750+1\end{array}\right\}750\times6+1=4501$$

Сходным образом поступают, когда находят арифметическое среднее чисел, близких между собой по величине. Найдем, например, среднюю из следующих цен:

руб.	коп.
4	65
4	73
4	75
4	67
4	78
4	74
4	68
4	72

Намечаем на глаз круглую цену, близкую к средней, — в данном случае, очевидно, 4 р. 70 к. Записываем отклонения всех цен от средней: избытки со знаком +, недостатки со знаком —.

Получаем:

$$-5+3+5-3+8+4-2+2=12.$$

Деля сумму отклонений на число их, имеем:

$$12:8=1,5.$$

Отсюда искомая средняя цена

$$4 \text{ р. } 70 \text{ к.} + 1,5 \text{ к.} = 4 \text{ р. } 71,5 \text{ к.}$$

Перейдем к умножению. Здесь прежде всего укажем, что умножение на числа 5, 25 и 125 значительно ускоряется, если иметь в виду следующее:

$$5=\frac{10}{2}; \qquad 25=\frac{100}{4}; \qquad 125=\frac{1000}{8}.$$

Поэтому, например,

$$36 \times 5=\frac{360}{2}=180; \qquad 87 \times 5=\frac{870}{2}=435;$$

$$36 \times 25=\frac{3600}{4}=900; \qquad 87 \times 25=\frac{8700}{4}=2175;$$

$$36 \times 125=\frac{36\,000}{8}=4500; \qquad 87 \times 125=\frac{87\,000}{8}=10\,875.$$

При умножении на 15 можно пользоваться тем, что

$$15=10 \times 1\frac{1}{2}.$$

Поэтому легко производить в уме вычисления вроде таких:

$$36 \times 15=360 \times 1\frac{1}{2}=360+180=540,$$

или проще:

$$36 \times 1\frac{1}{2} \times 10=540;$$

$$87 \times 15=870+435=1305.$$

При умножении на 11 нет надобности писать пять строк:

$$\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r}383\\11\end{array}\\
\hline
+\begin{array}{r}383\\383\end{array}\\
\hline
4213
\end{array}$$

Достаточно лишь под умноженным числом подписать его еще раз, отодвинув на одну цифру:

$$+\begin{array}{r}383\\383\\\hline 4213\end{array} \qquad \text{или} \qquad +\begin{array}{r}383\\383\\\hline 4213\end{array}$$

и произвести сложение.

Полезно запомнить результаты умножения первых девяти чисел на 12, 13, 14 и 15. Тогда умножение многозначных чисел на такие множители значительно ускоряется. Пусть требуется умножить

$$\times\begin{array}{r}4587\\13\\\hline\end{array}$$

Поступаем так. Каждую цифру множимого умножаем в уме сразу на 13:

$7\times 13=91$; 1 пишем, 9 запоминаем;
$8\times 13=104$; $104+9=113$; 3 пишем, 11 запоминаем;
$5\times 13=65$; $65+11=76$; 6 пишем, 7 запоминаем;
$4\times 13=52$; $52+7=59$.

Итого — 59 631.

После нескольких упражнений прием этот легко усваивается.

Весьма удобный прием существует для умножения двузначных чисел на 11: надо раздвинуть цифры множимого и вписать между ними их сумму:

$$43\times 11=473.$$

Если же сумма цифр двузначная, то число ее десятков прибавляют к первой цифре множимого:

$48 \times 11 = 4(12)8$, то-есть 528.

Укажем, наконец, кое-какие приемы ускоренного деления.

При делении на 5 умножают делимое и делитель на 2:

$$3471 : 5 = 6942 : 10 = 694{,}2.$$

При делении на 25 умножают оба числа на 4:

$$3471 : 25 = 13\,884 : 100 = 138{,}84.$$

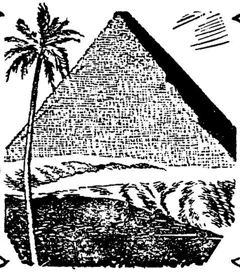
Сходным образом поступают при делении на $1\frac{1}{2}$ $(=1{,}5)$ и на $2\frac{1}{2}$ $(=2{,}5)$:

$$3471 : 1\frac{1}{2} = 6942 : 3 = 2314,$$
$$3471 : 2{,}5 = 13\,884 : 10 = 1388{,}4.$$

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ

Умножение = сложению.

$$2 \times 2 = 2 + 2$$
$$3 \times 1^{1}/_{2} = 3 + 1^{1}/_{2}$$
$$11 \times 1{,}1 = 11 + 1{,}1$$
$$21 \times 1^{1}/_{20} = 21 + 1^{1}/_{20}$$

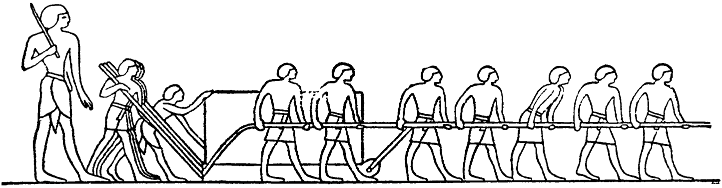


ГЛАВА ВОСЬМАЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАГАДКИ ПИРАМИДЫ ХЕОПСА

Высочайшая пирамида древнего Египта — Хеопсова, уже пять тысячелетий обвеваемая знойным воздухом пустыни, представляет без сомнения самую удивительную постройку, сохранившуюся от древнего мира. Высотой почти в 150 *м*, она покрывает своим основанием площадь в 40 000 *кв. м* и сложена из 200 рядов исполинских камней. 10 000 рабов в течение 30 лет трудились над возведением этого сооружения, сначала подготовляя 10 лет дорогу для перевозки камней от каменоломни до места постройки, а затем громоздя их 20 лет друг на друга с помощью несовершенных машин того времени.

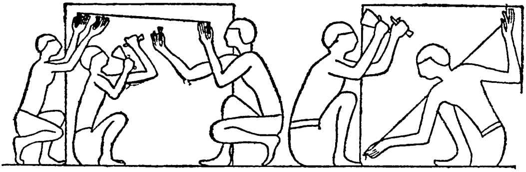
Было бы странно, чтобы такое огромное сооружение воздвигнуто было с единственной целью — служить гробницей для правителя страны. Поэтому некоторые исследователи стали доискиваться: не раскроется ли тайна пирамиды из соотношения ее размеров?



Перевозка камня на стройку пирамиды. Сзади рабочих идет надсмотрщик с хлыстом; поскольку он важнее всех остальных работников, он изображается более крупно (древнеегипетский рисунок).

Им посчастливилось, по их мнению, найти ряд удивительных соотношений, свидетельствующих о том, что жрецы, руководители работ по постройке, обладали глубокими познаниями по математике и астрономии и эти познания воплотили в каменных формах пирамиды.

„Геродот[1] рассказывает,— читаем мы в книге французского астронома Море („Загадки науки“, 1926, т. 1),— что египетские жрецы открыли ему следующее соотношение между стороной основания пирамиды и ее высотой:



При обтесывании каменных глыб египтяне пользовались растянутым шнурком, которым выявлялись неровности на обрабатываемой поверхности. Инструментами каменотесов были металлические зубила и деревянные молотки с конической головкой. Во всех крупных египетских постройках, включая пирамиды, огромные и тяжелые глыбы тесаного камня для лучшей плотности прилегания и устойчивости клали гладкой стороной внутрь.

---

[1] Геродот — знаменитый греческий историк; посетил Египет за 300 лет до нашей эры.

квадрат, построенный на высоте пирамиды, в точности равен площади каждого из боковых треугольников. Это вполне подтверждается новейшими измерениями. Вот доказательство, что во все времена пирамида Хеопса рассматривалась как памятник, пропорции которого рассчитаны математически.

Приведу более позднее доказательство: мы знаем, что отношение между длиной окружности и ее диаметром есть постоянная величина, хорошо известная современным школьникам. Чтобы вычислить длину окружности, достаточно умножить ее диаметр на 3,1416.

Математики древности знали это отношение лишь грубо приближенно.

Но вот, если сложить четыре стороны основания пирамиды, мы получим для ее обвода 931,22 *м*. Разделив же это число на удвоенную высоту (2 × 148,208), имеем в результате 3,1416, то-есть отношение длины окружности к диаметру. (Другие авторы из тех же измерений пирамиды выводят значение π с еще большей точностью: 3,14159.— *Я.П.*)

Этот единственный в своем роде памятник представляет собою, следовательно, материальное воплощение числа „пи“, игравшего столь важную роль в истории математики. Египетские жрецы имели, как видим, точные представления по ряду вопросов, которые считаются открытиями ученых позднейших веков“[1].

Еще удивительнее другое соотношение: если сторону основания пирамиды разделить на точную длину года — 365,2422 суток, то получается как раз 10 000 000-я доля земной полуоси — с точностью, которой могли бы позавидовать современные астрономы...

---

[1] Значение „пи“ с той точностью, которая получена здесь из соотношений размеров пирамиды, стало известно европейским математикам только в XVI веке.

Далее: высота пирамиды составляет ровно миллиардную долю расстояния от Земли до Солнца — величины, которая европейской науке стала известна лишь в конце XVIII века. Египтяне 5000 лет назад знали, оказывается, то, чего не знали еще ни современники Галилея[1] и Кеплера[2], ни ученые эпохи Ньютона[3]. Неудивительно, что изыскания этого рода породили на Западе обширную литературу.

А между тем все это — не более как игра цифрами. Дело представится совсем в другом свете, если подойти к нему с оценкой результатов приближенных вычислений.

Рассмотрим же по порядку те примеры, которые мы привели.

1. О числе „пи“. Арифметика приближенных чисел утверждает, что если в результате действия деления желаем получить число с шестью верными цифрами (3,14159), мы должны иметь в делимом и делителе по крайней мере столько же верных цифр. Это значит — в применении к пирамиде, — что для получения шестизначного „пи“ надо было измерить стороны основания и высоту пирамиды с точностью до миллионных долей результата, то-есть до 1 *мм*. Астроном Море приводит для высоты пирамиды 148,208 *м*, на первый взгляд как будто действительно с точностью до 1 *мм*.

Но кто поручится за такую точность измерения пирамиды? Вспомним, что в лабораториях Института мер

---

[1] Галилей Галилео (1564—1642) — великий итальянский физик, механик и астроном, один из основателей точного естествознания.

[2] Кеплер Иоганн (1571—1630) — выдающийся немецкий астроном, открывший на основе учения великого польского ученого Николая Коперника законы движения.

[3] Ньютон Исаак (1643—1727) — величайший английский математик, астроном и физик, всю жизнь посвятивший исключительно научным занятиям.

(ВИМС), где производятся точнейшие в мире измерения, не могут при измерении длины добиться такой точности (получают при измерении длины лишь шесть верных цифр). Понятно, насколько грубее может быть выполнено измерение каменной громады в пустыне. Правда, при точнейших землемерных работах (при измерении так называемых „базисов“) можно и на местности достичь такой же точности, как и в лаборатории, то-есть ручаться за шесть десятичных знаков. Но, конечно, невозможно осуществить это в условиях измерения пирамиды. К тому же истинных, первоначальных размеров пирамиды давно нет в натуре, так как облицовка сооружения выветрилась, и никто не знает, какой она была толщины. Чтобы быть добросовестным, надо брать размеры пирамиды в целых метрах, а тогда получается довольно грубое „пи“, не более точное, чем то, которое давно известно из математического папируса Ринда.

Если пирамида действительно есть каменное воплощение числа „пи“, то воплощение это, как видим, далеко не совершенное. Но вполне допустимо, что пирамида не сооружена ради выражения именно этого соотношения. В пределы приближенных трехзначных чисел для размеров пирамиды хорошо укладываются и другие допущения. Возможно, например, что для высоты пирамиды было взято $^2/_3$ ребра пирамиды или $^2/_3$ диагонали ее основания. Вполне допустимо и то соотношение, которое было указано Геродотом: что высота пирамиды есть квадратный корень из площади боковой грани. Все это — догадки, столь же вероятные, как и „гипотеза пи“.

2. Следующее утверждение касается продолжительности года и длины земного радиуса: если разделить сторону основания пирамиды на точную длину года (чис-

ло из семи цифр), то получим в точности 10 000 000-ю долю земной оси (число из пяти цифр). Но раз мы уже знаем, что в делимом у нас не больше трех верных цифр, то ясно, какую цену имеют здесь эти семь и пять знаков в делителе и в частном. Арифметика может ручаться в этом случае только за три цифры в длине года и земного радиуса. Год в 365 суток и земной радиус около 6400 *км* — вот числа, о которых мы вправе здесь говорить.

3. Что же касается расстояния от Земли до Солнца, то здесь недоразумение иного рода. Странно даже, как приверженцы теории могут не замечать допускаемой ими здесь логической ошибки. Ведь если, как они утверждают, сторона пирамиды составляет известную долю земного радиуса, а высота — известную долю основания, то нельзя уже говорить, будто та же высота составляет определенную долю расстояния до Солнца. Что-нибудь одно — либо то, либо другое. А если случайно тут обнаруживается любопытное соответствие обеих длин, то оно всегда существовало в нашей планетной системе, и никакой заслуги жрецов в этом быть не может.

Сторонники рассматриваемой теории идут еще далее: они утверждают, что масса пирамиды составляет ровно одну тысячебиллионную долю массы земного шара. Это соотношение, по их мнению, не может быть случайным и свидетельствует о том, что древнеегипетские жрецы знали не только геометрические размеры нашей планеты, но и задолго до Ньютона и Кавендиша[1] исчислили ее массу — „взвесили“ земной шар.

Здесь та же самая нелогичность, что и в примере с расстоянием от Земли до Солнца. Совершенно нелепо говорить о том, будто масса пирамиды „выбрана“ в оп-

---

[1] Кавендиш Генри (1731—1810) — английский физик.

ределенном соответствии с массой земного шара. Масса пирамиды определилась с того момента, как назначены были размеры ее основания и высоты.

Нельзя одновременно сообразовать высоту пирамиды с основанием, составляющим определенную долю земного радиуса, и независимо от этого ставить ее массу в связь с массой Земли. Одно определяется другим.

Значит, должны быть отвергнуты всякие домыслы о знании египтянами массы земного шара. Это не более как числовая эквилибристика (то-есть изворотливость.—*Ред.*).

Искусно оперируя с числами, опираясь на случайные совпадения, можно доказать, пожалуй, все что угодно.

Мы видим, на каких шатких основаниях покоится легенда о непостижимой учености жрецов-архитекторов пирамиды.

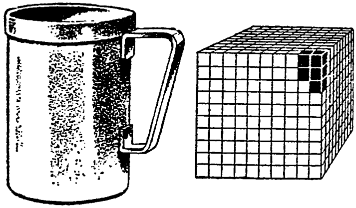
Попутно мы имеем тут и маленькую наглядную демонстрацию пользы того отдела арифметики, который занимается приближенными числами.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛА

Кто незнаком с правилами действий над приближенными числами, тому, вероятно, интересно будет хотя бы вкратце с ними ознакомиться, тем более что знание этих простых приемов оказывается и практически полезным, сберегая труд и время при вычислениях.

Объясним прежде всего, что такое приближенное число и откуда такие числа получаются.

Данные, входящие в технические расчеты, получаются путем измерения. Но никакое измерение не может быть выполнено совершенно точно. Прежде всего уже самые меры, которыми пользуются для измерения, обычно заключают в себе погрешность. Изготовить совершенно точные метровые линейки, килограммовую гирю, литровую кружку чрезвычайно трудно, и закон допускает при их изготовлении некоторую погрешность. Например, при изготовлении метровой линейки допускается законом погрешность до 1 *мм*; для 10-метровой землемерной цепи или ленты — до 1 *см*; для килограммовой гири[1] — до 1 *г*; для разновески в 1 *г* — до 0,01 *г*; для литровой кружки — до 5 *куб. см.*



При изготовлении литровой мерной кружки закон допускает погрешность до 5 *куб. см.*

Кроме того, выполнение измерения вводит еще неточности. Пусть вы измеряете какое-нибудь расстояние, например ширину улицы. Мера, метр, отложилась в ее ширине, допустим, 13 раз, и еще остался кусочек меньше метра. Вы можете сказать, что ширина улицы 13 *м*; на самом деле, однако, она равна 13 целым метрам и еще некоторому числу десятых, сотых и т. д. долей метра, которых вы не учли. Следовательно, результат вашего измерения можно изобразить так:

ширина улицы — 13,??? *м*,

где вопросительные знаки означают неизвестные нам цифры десятых, сотых и т. д. долей.

Если бы вы пожелали измерить ширину улицы точнее, вы узнали бы, сколько в остающемся кусочке содержится дециметров (десятых долей метра). Допустим, что дециметров содержится 8 и еще имеется некоторый остаток, меньший дециметра. Результат нового измерения, 13,8 *м*,

---

[1] Помимо погрешности в гирях, закон допускает погрешность и в устройстве весов, доходящую, например, в столовых весах до 1 *г* на каждый килограмм отвешиваемого груза.

будет точнее предыдущего, но и он не строго точен, потому что, кроме 8 десятых метра, в ширине улицы заключается еще некоторое неизвестное нам число сотых, тысячных и т. д. долей метра. Следовательно, полученный сейчас более точный результат мы можем выразить так:

13,8?? *м*.

При еще более тщательном измерении вы учтете сотые доли метра (сантиметры) в откинутом остатке, но пренебрежете остатком, меньшим сантиметра; значит, и этот результат не будет абсолютно точен. Вообще, как бы аккуратно вы ни мерили, никогда не можете вы быть твердо уверены, что далее последней полученной вами цифры не находятся еще другие, вам неизвестные.

Дело, конечно, нисколько не меняется от того, что при измерениях остатки, большие половины единицы меры, обычно считаются за целые. Если бы при первом измерении улицы мы считали ее ширину не 13 *м*, а 14,—это также был бы лишь приближенный результат. Его можно было бы выразить так:

14,??? *м*,

где вопросительные знаки означают отрицательные цифры (то-есть показывают, на сколько десятых, сотых и т. д. долей число 14 больше истинной ширины улицы).

Итак, результат даже самого тщательного измерения не может быть рассматриваем как совершенно точный: он выражает истинную величину лишь более или менее приближенно. Такие числа называются приближенными.

Арифметика приближенных чисел не во всем сходна с арифметикой чисел точных. Покажем это различие на примере.

Пускай требуется вычислить площадь прямоугольного участка, длина которого 68 *м*, а ширина — 42 *м*.

Если бы числа 68 и 42 были точные, площадь участка в точности равнялась бы

$$68 \times 42 = 2856 \text{ кв. м.}$$

Но числа 68 и 42 не точные, а приближенные: в длине не ровно 68 *м*, а немного больше или меньше, так как невероятно, чтобы метр укладывался в ней в точности 68 раз. Да и самая длина метровой линейки вряд ли в точности была равна 1 *м*. Мы можем, согласно предыдущему, выразить длину участка в метрах так:

$$68,?$$

Подобным же образом и ширину участка выразим через

$$42,?$$

Проделаем теперь умножение приближенных чисел:

$$68,? \times 42,?$$

Выполнение действия видно из следующей схемы:

$$\begin{array}{r} \times\ 68,?\\ 42,?\\ \hline ???\\ 136?\\ 272?\\ \hline 285?,?? \end{array}$$

Мы видим, что четвертая цифра результата нам неизвестна: она должна получиться от сложения трех цифр (? + 6 + ?), из которых две неизвестны. Недостоверна также и третья цифра результата. Мы записали 5, но ведь от сложения столбца ? + 6 + ? могло получиться число больше 10 и даже 20; значит, вместо 5 может оказаться и 6 и 7. Вполне надежны только первые две цифры результата (28). Поэтому, желая быть добросовестными, мы должны утверждать лишь, что искомая площадь заключает около 28 сотен квадратных метров. Каковы цифры десятков и единиц в числе квадратных метров, нам неизвестно.

Итак, правильный ответ на вопрос задачи — 2800 причем ноли означают не заведомое отсутствие единиц соответствующих разрядов, а лишь отсутствие достоверных знаний о них. Ноли означают здесь то же, что и вопросительные знаки в предыдущих обозначениях.

Ошибочно думать, что ответ 2856, полученный по правилам арифметики точных чисел, вернее ответа 2800. Ничуть: ведь мы видели, что последние две цифры результата (56) доверия не заслуживают: поручиться за них нельзя. Ответ 2800 предпочтительнее, чем 2856, потому что он не вводит в заблуждение — он прямо утверждает, что достоверны лишь цифры 2 и 8 на месте тысяч и сотен, а какие цифры идут дальше — неизвестно. Ответ же 2856 обманчив: он внушает неверную мысль, будто последние две цифры столь же надежны, как и первые две.

„Нечестно писать больше цифр, чем столько, за сколько мы можем ручаться... Мне очень грустно признаться, что не мало таких чисел, ведущих к превратным представлениям, встречается в лучших сочинениях о паровых машинах... Когда я учился в школе, нам сообщали, что среднее расстояние от Земли до Солнца 95 142 357 английских миль[1]. Я удивляюсь, почему не было упомянуто, сколько еще футов и дюймов. Наиболее точные современные измерения позволяют лишь утверждать, что это расстояние не больше 93 и не меньше 92,5 миллиона миль“, — писал по этому поводу английский математик Перри.

Итак, при выкладках с приближенными числами надо принимать во внимание не все цифры результата, а только некоторые. Остановимся на том, как надо округлять числа.

---

[1] Английская миля равна 1852 *м*.

ОКРУГЛЕНИЕ ЧИСЕЛ

Округление числа при выкладках состоит в том, что одну или несколько цифр на его конце заменяют нолями. Так как ноли, стоящие после запятой, не имеют значения, то их отбрасывают вовсе. Например:

числа	*округляют в*
3734	3730 или 3700
5,314	5,31 или 5,3
0,00731	0,0073 или 0,007

Если первая из отбрасываемых при округлении цифр есть 6 или больше, то предыдущую увеличивают на единицу. Например:

числа	*округляют в*
4867	4870 или 4900
5989	5990 или 6000
3,666	3,67 или 3,7

Так же поступают, если отбрасывается цифра 5 с последующими за нею значащими цифрами. Например:

числа	*округляют в*
4552	4600
38,1506	38,2

Но если отбрасывается только цифра 5, то увеличивать на единицу предшествующую цифру условились лишь тогда, когда она нечетная; четную же цифру оставлять без изменения. Например:

числа	*округляют в*
735	740
8645	8640
37,65	37,6
0,0275	0,028
70,5	70[1]

---

[1] Ноль рассматривают как четную цифру.

При обработке результатов действий над приближенными числами руководствуются теми же правилами округления.

ЦИФРЫ ЗНАЧАЩИЕ И НЕЗНАЧАЩИЕ

Под значащими цифрами в учении о приближенных вычислениях разумеют все цифры, кроме ноля, а также и ноль в том случае, если он стоит между другими значащими цифрами. Так, в числах 3700 и 0,0062 все ноли — незначащие цифры; в числах же 105 и 2006 ноли — значащие. В числе 0,0708 первые два ноля — незначащие, третий же ноль — значащая цифра.

В некоторых случаях значащий ноль может находиться и в конце числа; округляя, например, число 2,540002, мы получаем число 2,54000, в котором все ноли на конце — значащие, так как указывают на заведомое отсутствие единиц в соответствующих разрядах. Поэтому, если в условии задачи или в таблице мы встречаем числа 4,0 или 0,80, то должны рассматривать их как двузначные. Округляя число 289,9 в 290, мы также получаем на конце значащий ноль.

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЧИСЕЛ

Результат сложения или вычитания приближенных чисел не должен оканчиваться значащими цифрами в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из данных чисел. Если такие цифры получились, их следует отбросить посредством округления.

$$\begin{array}{r} 3400 \\ +\ 275 \\ \hline 3700 \end{array}$$

(а не 3675)

$$\begin{array}{r} 28{,}3 \\ +\ 146{,}85 \\ 108 \\ \hline 283 \end{array}$$

(а не 283,15)

$$\begin{array}{r} 176{,}3 \\ -\ 0{,}46 \\ \hline 175{,}8 \end{array}$$

(а не 175,84)

Нетрудно понять основание этого правила. Пусть требуется к 3400 *м* прибавить 275 *м*. В числе 3400 мерщик, очевидно, пренебрег десятками метров; ясно, что, прибавив к этому числу 7 десятков метров и еще 5 *м*, мы получим в сумме не 3675 *м*, а, скорее всего, результат с иными цифрами на месте десятков и единиц. Поэтому на месте десятков и единиц мы пишем в сумме ноли, которые в данном случае указывают, что вычислителю неизвестно, какие именно цифры должны здесь стоять.

УМНОЖЕНИЕ, ДЕЛЕНИЕ И ВОЗВЫШЕНИЕ В СТЕПЕНЬ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЧИСЕЛ

Результат умножения, а также деления приближенных чисел не должен заключать больше значащих цифр, чем имеется их в более коротком данном (из двух чисел то „короче“, которое содержит меньше значащих цифр). Лишние цифры заменяют нолями.

Примеры:

$$\begin{array}{r} \times\; 37 \\ 245 \\ \hline 9100 \end{array}$$

(а не 9065)

$57{,}8 : 3{,}2 = 18$ (а не 18,06);

$25 : 3{,}14 = 8{,}0$ (а не 7,961).

При подсчете числа цифр не обращают на запятую внимания: так, 4,57 есть число трехзначное и т. п.

Число значащих цифр степени приближенного числа не должно превышать числа их в основании степени. Излишние цифры заменяются нолями.

Примеры:

$157^2 = 24\,600$ (а не 24 649);

$5{,}81^3 = 196$ (а не 196,122941).

ПРИМЕНЕНИЕ НА ПРАКТИКЕ

Правила эти относятся лишь к результатам окончательным. Если же выполняемым действием расчет еще не заканчивается, то в результате такого промежуточного действия удерживают одной значащей цифрой больше, чем требуют правила. Выполняя, например, вычисление

$$\frac{36 \times 1{,}4}{3{,}4},$$

поступают так:

$36 \times 1{,}4 = 50{,}4$ (удерживают не две, а три цифры);
$50{,}4 : 3{,}4 = 15.$

При несложных технических расчетах указанные выше правила могут быть почти во всех случаях применяемы следующим упрощенным образом. Прежде чем вычислять, устанавливают по числу цифр самого короткого данного, сколько достоверных цифр может заключать окончательный результат. Когда это установлено, приступают к выкладкам; причем во всех промежуточных выкладках удерживают одной цифрой больше, чем установлено для окончательного результата.

Если, например, в условии задачи дано несколько трехзначных чисел и одно двузначное, то окончательный результат будет иметь две достоверные цифры, а промежуточные результаты надо брать с тремя цифрами.

Итак, все правила приближенных вычислений могут быть при выполнении расчетов сведены к двум следующим:

1) устанавливают, сколько значащих цифр в самом коротком из данных задачи: столько же значащих цифр нужно будет удержать в окончательном результате;

2) в результате всех промежуточных вычислений удерживают одной цифрой больше, чем установлено для окончательного результата[1].

Прочие цифры во всех случаях заменяют нолями или отбрасывают по правилам округления.

---

[1] Подробнее о приближенных вычислениях см. брошюру Я. И. Перельмана „Таблицы и правила для вычислений“.

Правила эти неприменимы к тем задачам (встречающимся редко), для решения которых нужно производить только действия сложения и вычитания. В таких случаях придерживаются другого правила.

Окончательный результат не должен иметь значащих цифр в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из приближенных данных. В промежуточных результатах надо удерживать одной значащей цифрой больше, чем установлено для окончательного. От прочих цифр освобождаются округлением.

Если, например, данные задачи таковы:

37,5 *м*, 185,64 *м*, 0,6725 *м*

и для решения требуется вычесть первое число из суммы других, то в сумме

$$\begin{array}{r} 185{,}64 \\ +\ \ 0{,}6725 \\ \hline 186{,}3125 \end{array}$$

как в промежуточном результате, откидывают последнюю цифру (то-есть берут 186,312), а в разности

$$\begin{array}{r} 186{,}312 \\ -\ \ 37{,}5 \\ \hline 148{,}812 \end{array}$$

как в результате окончательном, удерживаем лишь 148,8.

СБЕРЕЖЕНИЕ СЧЕТНОГО ТРУДА

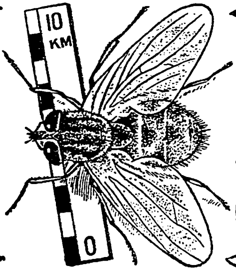
Как оценить, сколько вычислительной работы сберегаем мы, пользуясь изложенными сейчас приемами? Для этого надо какой-нибудь сложный расчет выполнить двояко: один раз — по обычным арифметическим правилам, другой — приближенно. А затем терпеливо подсчитать, сколько раз при том и другом подсчете приходилось нам складывать, вычитать и умножать отдельные цифры. Окажется, что приближенный расчет потребует таких элементарных операций в $2^1/_2$ раза меньше, чем „точный“. Ущерба же для правильности результата в приближенном расчете нет никакого.

Итак, приближенные вычисления требуют примерно в $2^1/_2$ раза меньше времени, нежели вычисление по обычным правилам. Но это еще не все сбережение времени, какое при этом достигается. Ведь каждая лишняя счетная операция, каждый лишний случай сложения, вычитания или умножения цифр является лишним поводом сделать ошибку. Вероятность ошибиться при приближенных выкладках в $2^1/_2$ раза меньше, чем при „точных“. А стоит хоть раз ошибиться — и вычисление придется переделать заново, если не все целиком, то часть его. Значит, сбережение труда и времени при приближенных расчетах получается во всяком случае больше, чем в $2^1/_2$ раза. Время, затраченное на ознакомление с ними, вознаграждается очень быстро и щедро.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ

Умножение = вычитанию.

$$1 \times {}^1/_2 = 1 - {}^1/_2$$
$$6 \times {}^6/_7 = 6 - {}^6/_7$$
$${}^1/_2 \times {}^1/_3 = {}^1/_2 - {}^1/_3$$
$${}^1/_3 \times {}^1/_4 = {}^1/_3 - {}^1/_4$$



ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ЧИСЛОВЫЕ ВЕЛИКАНЫ

КАК ВЕЛИК МИЛЛИОН?

Для тех, кто не отдает себе достаточно ясного отчета в огромности миллиона и миллиарда, остаются не вполне осознанными колоссальные достижения нашего социалистического строительства, выражающиеся миллионными и миллиардными числами.

Чтобы ощутить грандиозность подобных чисел, стоит затратить немного времени на „арифметическую гимнастику“, развивающую способность правильно оценивать подлинные размеры больших чисел.

Начнем с миллиона — старейшего числового великана (наименование миллион впервые появилось в 1500 году в Италии).

Если хотите ощутить истинные размеры миллиона, попробуйте хотя бы проставить в чистой тетради миллион точек. Я не предлагаю вам доводить такую работу до конца (едва ли у кого на это хватит терпения); уже одно начало работы, медленный ее ход дадут вам почувствовать, что такое „настоящий“ миллион.

МИЛЛИОН СЕКУНД

Здесь я предлагаю доступный для каждого способ развить в себе возможно отчетливое представление о величине миллиона. Для этого нужно дать себе труд поупражняться в мысленном миллионном счете мелких, но хорошо знакомых нам единиц — шагов, минут, спичек, стаканов и т. п. Результаты получаются нередко неожиданные и поразительные.

Приведем несколько примеров.

Сколько времени отняла бы у вас работа — пересчитать миллион каких-либо предметов, по одному в каждую секунду?

Оказывается, что, считая безостановочно по 10 часов в сутки, вы закончили бы подсчет в месяц времени! Приблизительно удостовериться в этом нетрудно устным вычислением: в часе 3600 секунд, в 10 часах — 36 000; в трое суток вы, следовательно, пересчитаете всего около 100 000 предметов; а так как миллион в 10 раз больше, то, чтобы досчитать до него, понадобится 30 дней[1].

Отсюда следует, между прочим, что предложенная ранее работа — поставить в тетради миллион точек — потребовала бы многих недель самого усердного и неустанного труда.

---

[1] Отметим, для сведения, что в году (астрономическом) 31 558 150 секунд; миллион секунд в точности равен 11 суткам 13 часам 46 минутам 40 секундам.

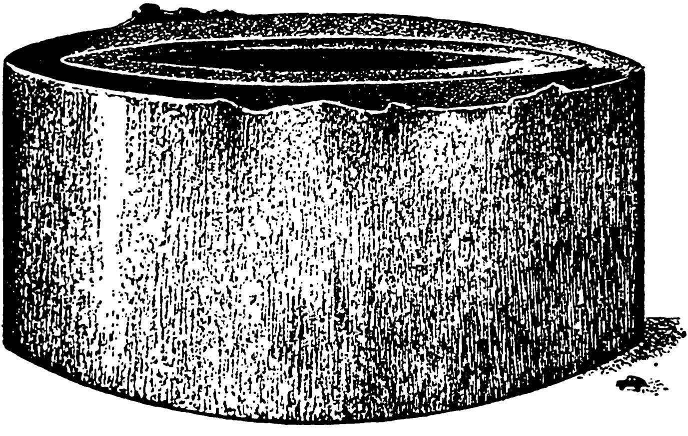
В МИЛЛИОН РАЗ ТОЛЩЕ ВОЛОСА

Тонкость волоса вошла чуть не в поговорку. Все часто видят волос и хорошо знают, насколько он тонок.

Толщина человеческого волоса — около 0,07 *мм*. Мы округлим ее для удобства вычислений до 0,1 *мм*. Представьте себе, что рядом, бок о бок, положен миллион волос. Какой ширины получилась бы полоса? Можно ли было бы, например, протянуть ее поперек двери от косяка до косяка?

Если вы никогда не задумывались над такой задачей, то можно поручиться, что, не проделав вычисления, вы дадите грубо ошибочный ответ. Вы будете, пожалуй, даже оспаривать правильный ответ — настолько покажется он неправдоподобным. Каков же он?

Оказывается, что волос, увеличенный по толщине в миллион раз, имел бы около сотни метров в попереч-



Автомобиль „Победа“ (справа внизу) перед отрезком человеческого волоса, увеличенного в миллион раз.

нике! Это кажется невероятным, но дайте себе труд сделать подсчет, и вы убедитесь, что так и есть: 0,1 *мм* × 1 000 000 = 0,1 *м* × 1000 = 0,1 *км* = 100 *м*[1].

УПРАЖНЕНИЯ С МИЛЛИОНОМ

Проделайте — лучше всего устно — еще ряд упражнений, чтобы освоиться надлежащим образом с величиной миллиона.

1. Величина обыкновенной комнатной мухи общеизвестна — около 7 *мм* в длину. Но какова была бы ее длина при увеличении в миллион раз?

Решение.

Умножим 7 *мм* на 1 000 000, получим 7 *км* — примерно ширина Москвы или Ленинграда. Значит, муха, увеличенная линейно в миллион раз, могла бы покрыть своим телом столичный город!

2. Увеличьте мысленно в миллион раз (по ширине) ваши карманные часы — и получите снова поражающий результат; едва ли вам удастся предугадать его без расчета. Какой?

Решение.

Часы имели бы в ширину километров 50, а каждая цифра простиралась бы на географическую милю (7 *км*).

3. Какого роста достигал бы человек, увеличенный в миллион раз?

---

[1] Мы проделали здесь умножение следующим путем: вместо умножения числа, мы дважды заменили самую единицу меры другой, в тысячу раз большей. Этот прием очень удобен для устных подсчетов, и им следует пользоваться при выкладках с метрическими мерами.

Решение.

1700 километров! Он был бы всего в 8 раз меньше поперечника земного шара. Буквально одним шагом мог бы он перешагнуть из Ленинграда в Москву, а если бы лег, то растянулся бы от Финского залива до Крыма...

Приведу еще несколько готовых подсчетов того же рода, предоставляя проверку их читателю.

Миллион человек, выстроенных в одну шеренгу плечом к плечу, растянулись бы на 250 *км*.

Миллион точек типографского шрифта — например, этой книги, — поставленных рядом вплотную, вытянулись бы в линию длиной в сотни метров.

Зачерпывая миллион раз наперстком, вы вычерпаете около тонны воды.

Книга в миллион страниц имела бы в толщину метров 50.

Миллион букв заключает книга убористой печати в 600—800 страниц среднего формата.

Миллион дней — более 27 столетий. От начала нашей эры не прошло еще миллиона дней!

Человек, увеличенный в миллион раз, едва умещается между Черным и Балтийским морями.

ЧИСЛОВЫЕ ИСПОЛИНЫ СОВЕТСКОЙ СОВРЕМЕННОСТИ

Читая наши газеты, мы встречаемся с числовыми великанами на каждом шагу, и кто не умеет составить себе правильного представления об этих числах, тому недоступен подлинный масштаб и размах социалистической стройки. Возьмем для примера числа, характеризующие наше народное образование. На X съезде ВЛКСМ тов. А. А. Андреев отметил:

„В 1936 году количество учащихся в начальных и средних школах составит 27 935 900 человек“.

Если вы не приложите усилий к тому, чтобы осознать это число путем конкретных сопоставлений, оно так и останется в нашей памяти мертвым рядом из восьми цифр.

Но вообразите, что 28 миллионов школьников выстроены в одну шеренгу, по три на метр длины,— и вы с изумлением узнаете, что такая шеренга растянулась бы без малого на 10 000 *км*, то-есть едва поместилась бы в необъятных просторах нашей страны и почти могла бы соединить полюс с экватором. А взявшись за руки, армия советских школьников образовала бы цепь, которая могла бы охватить земной шар по экватору.

В том же, 1936 году для этой армии школьников намечено было к изданию 156 миллионов экземпляров учебников. Попробуем представить себе наглядно этот небывалый ни в какой другой стране выпуск учебных книг. Пусть все 156 миллионов книг наложены одна на другую. Рассчитаем высоту столба, который таким образом составится. Принимая, что толщина одного учебника в среднем только 1 *см*, получим для высоты столба более 1500 *км*. Столб пронижет насквозь всю толщу земной атмосферы, на 1000 километров выступая над границей разреженнейших ее областей и возвышаясь над твердой землей на четверть радиуса нашей планеты.

Остановимся еще на одном примере — из области социалистического земледелия. В своей речи на совещании комбайнеров в декабре 1935 года товарищ Сталин сказал:

„Мы собираем в этом году более пяти с половиной миллиардов пудов зерна“.

Миллиард — это тысяча миллионов, 1 000 000 000. У нас еще будет речь об этом числовом великане высшего ранга; пока же попытаемся представить себе наглядно урожай зерна в СССР за 1935 год. Мешок зерна весом в один пуд (16 *кг*) имеет в ширину сантиметров 30—40.

Вообразим же 5500 миллионов таких мешков, выложенных в один ряд. Какой длины достиг бы этот ряд? С трудом верится: им можно было бы 5 раз соединить Землю с Луной! Расчет не сложен, и вы легко можете проверить его правильность. На протяжении каждого метра легло бы три мешка; 5500 миллионов мешков, деленные на 3, составят круглым счетом 1800 миллионов. Такова длина ряда мешков в метрах; это равно 1 800 000 *км*; от Земли же до Луны всего 380 000 *км*, то-есть почти впятеро меньше. Добавим еще, что для пересчета всех мешков по одному в секунду потребовалось бы 170 лет безостановочной работы...

НАЗВАНИЯ ЧИСЛОВЫХ ВЕЛИКАНОВ

Мы беседовали сейчас о миллионах. Прежде чем перейти к еще большим числовым гигантам — миллиардам, биллионам, триллионам и т. д., остановимся немного на их названиях. Слово „миллион“ понимается всеми одинаково: тысяча тысяч. Но слова биллион, триллион и т. д. сравнительно не так давно придуманы и еще не получили единообразного значения. При финансовых расчетах и в житейском обиходе принято у нас называть биллионом тысячу миллионов, а триллионом — миллион миллионов. Но в книгах по астрономии и физике вы встречаете эти названия в другом значении: биллион означает здесь не тысячу, а миллион миллионов, триллион — миллион миллионов миллионов, квадрильон — миллион миллионов миллионов миллионов и т. д. Короче говоря: в научных книгах каждое новое высшее наименование принято давать миллиону низших, а в финансовых расчетах и в обиходе — тысяче низших.

Приведенная табличка наглядно показывает это различие.

В обиходе и в финансовых расчетах	квинтильоны	квадрильоны	триллионы	биллионы (= миллиарды)	миллионы	тысячи	единицы
	0	000	000	000	000	000	000
В астрономии и физике	триллионы		биллионы	миллиарды	миллионы		

Вы видите, что физик или астроном называет биллионом то, что финансист называет триллионом, и т. д., так что, во избежание недоразумений, следует наименование всегда сопровождать цифрами. Это, пожалуй, единственный случай в практике, когда обозначение суммы прописью не поясняет, а затемняет написанное цифрами. Вы видите также, что астрономы и физики гораздо экономнее пользуются новыми названиями, чем финансисты, которым, впрочем, нет основания особенно скупиться в этом отношении, так как им почти не приходится иметь дело более чем с 12-значными числами; в науке же и 20-значные числа — нередкие гости [1].

МИЛЛИАРД

Миллиард — самое молодое из названий чисел. Оно вошло в употребление лишь со времени окончания франко-прусской войны (1871 год), когда французам пришлось уплатить Германии контрибуцию в 5 000 000 000 франков. Как и „миллион“, слово „миллиард“ происходит от корня — тысяча — и представляет собой итальянское увеличительное от этого существительного. Чтобы составить себе представление об огромности миллиардов, подумайте о том, что в книжке, которую вы сейчас читаете, заключается немногим более 200 000 букв. В пяти таких книжках окажется миллион букв. А миллиард букв будет заключать в себе стопка из 5000 экземпляров этой книжки — стопка, которая, будучи аккуратно сложена, составила бы столб высотой с Исаакиевский собор.

В 1 *куб. м* содержится кубических миллиметров ровно миллиард (1000×1000×1000). Попробуем подсчитать, какой высоты получился бы столб, если бы все эти крошечные миллиметровые кубики были поставлены один на другой. Итог получается поразительный — 1000 *км*!

Миллиард минут составляет более 19 столетий; человечество всего 50 с лишним лет назад начало считать второй миллиард минут от первого дня нашей эры.

---

[1] Надо заметить, впрочем, что обычные цифровые обозначения весьма больших чисел и их названия употребляются лишь в популярных книгах; в книгах же научных—по физике и астрономии — пользуются обыкновенно иным способом обозначения: биллион обозначается 10^{12}, триллион—10^{18}, 27 тысяч биллионов — $27 \cdot 10^{15}$ и т. д. При таком способе обозначения сберегается место и, кроме того, гораздо легче производить над числами различные действия (по правилам, изучаемым в алгебре).

БИЛЛИОН И ТРИЛЛИОН

Великан-миллион — такой же карлик рядом с сверхвеликаном-биллионом, как единица рядом с миллионом. Об этом взаимоотношении мы обыкновенно забываем и в своем воображении не делаем большой разницы между миллионом, биллионом и триллионом. Мы уподобляемся здесь тем первобытным народам, которые умеют считать только до 2 или до 3, а все числа свыше их обозначают словом много.

„Подобно тому, как ботокудам[1] кажется несущественной разница между двумя и тремя, так и многим современным культурным людям представляется несущественной разница между биллионом и триллионом, — говорит один математик. — По крайней мере, они не думают о том, что одно из этих чисел в миллион раз больше другого и что, значит, первое относится ко второму приблизительно так, как расстояние от Москвы до Сан-Франциско относится к ширине улицы".

Волос, увеличенный по толщине в биллион раз, был бы раз в восемь шире земного шара, а муха при таком увеличении была бы в 70 раз толще Солнца!

Взаимоотношение между миллионом, биллионом и триллионом можно с некоторой наглядностью представить таким образом. Вообразите себе длинный прямой ряд городов, каждый с миллионом жителей,— целый миллион городов: в этой цепи, тянущейся на несколько миллионов километров, будет насчитываться биллион жителей... Теперь вообразите, что перед вами не один такой ряд городов, а целый миллион рядов, то-есть квадрат, каждая сторона которого состоит из миллиона таких городов и который внутри сплошь уставлен такими городами: в этом квадрате будет триллион жителей.

---

[1] Ботокуды — индейское племя, жившее немногочисленными группами в Восточной Бразилии.

Одним триллионом кирпичей можно было бы, размещая их плотным слоем по твердой поверхности земного шара, покрыть все материки равномерным сплошным пластом высотой почти с четырехэтажный дом.

Если бы все видимые в сильнейшие телескопы звезды обоих небесных полушарий, то-есть примерно 500 миллионов звезд, были обитаемы и населены каждая, как наша Земля, то на всех этих звездах, вместе взятых, насчитывался бы „только“ триллион людей.

Последнюю иллюстрацию заимствуем из мира мельчайших частиц — мира молекул. Молекула по ширине меньше точки типографского шрифта этой книги примерно в миллион раз. Вообразите же триллион таких молекул, нанизанных вплотную на одну нитку. Какой длины была бы эта нить? Ею можно было бы семь раз обмотать земной шар по экватору!

В каждом кубическом сантиметре воздуха (то-есть примерно в наперстке) насчитывается — отметим кстати — от 20 до 30 триллионов молекул. Как велико это число, видно, между прочим, из того, что, достигнув с помощью совершеннейших воздушных насосов самой крайней степени разрежения — в 100 миллиардов раз, — мы все-таки будем еще иметь в каждом кубическом сантиметре до 270 миллионов молекул! Не знаешь, чему изумляться больше: огромной численности молекул или их невообразимой малости...

КВАДРИЛЬОН

В „Арифметике“ Магницкого, о которой мы не раз уже упоминали, приводится таблица названий классов чисел, доведенная до квадрильона, то-есть единицы с 24 нолями[1].

---

[1] Магницкий придерживался той классификации чисел, которая дает каждое новое наименование миллиону низших единиц (биллион — миллион миллионов, и т. д.).

Это было большим шагом вперед по сравнению с более древним числовым инвентарем наших предков. Древняя славянская лестница больших чисел была до XV века гораздо скромнее и достигала только 100 миллионов. Вот эта старинная нумерация:

„тысяща“	1 000
„тьма“	10 000
„легион“	100 000
„леодр“	1 000 000
„вран“	10 000 000
„колода“	100 000 000

Магницкий широко раздвинул в своей табличке древние пределы больших чисел. Но он считал практически бесполезным доводить систему наименований числовых великанов чересчур далеко. Вслед за таблицей он помещает такие стихи:

Числ есть бесконечно,
умом нам недочтено.
Несть бо нам определено,
тем же есть и безделно
Множайших чисел искати
и болше сей писати

Превосходной таблицы
умов наших границы.
И аще кому треба
счисляти что внутрь неба
Довлеет числа сего
к вещам всем мира сего.

Старинный математик хотел сказать этими стихами, что так как ум человеческий не может объять бесконечного ряда чисел, то бесцельно составлять числа больше тех, которые представлены в его таблице — „умов наших границы“. Заключающиеся в ней числа (от единицы до квадрильонов включительно) достаточны, по его мнению, для исчисления всех вещей видимого мира,— для каждого „кому треба счисляти что внутрь неба“.

Любопытно, что еще и в наши дни упомянутая таблица Магницкого почти достаточна для тех исследователей природы, которым „треба счисляти что внутрь неба“. При измерении расстояний до отдаленнейших светил, едва улавливаемых фотоаппаратом с помощью сильнейшего телескопа, астрономам не приходится обращаться к наименованиям свыше миллиона. Самое отдаленное из известных нам небесных тел отстоит от Земли на 100 миллионов „световых лет“ [1]. Если бы мы пожелали даже выразить это расстояние в сантиметрах, то получили бы около 1000 квадрильонов; значит, мы и тогда не вышли бы еще из пределов таблицы Магницкого.

Обращаясь в другую сторону — к миру весьма малых величин, мы и здесь не ощущаем пока надобности пользоваться числами свыше квадрильонов. Число молекул в 1 *куб. см* газа — одно из самых больших множеств, реально исчисленных, — выражается десятками триллионов.

Если бы мы вздумали подсчитать, сколько капель в океане (приравнивая объем капли 1 *куб. мм*, что весьма немного), нам и тогда не пришлось бы обратиться к наименованиям выше квадрильона, потому что число это исчисляется только тысячами квадрильонов.

И лишь при желании выразить, сколько граммов вещества заключает вся наша солнечная система, понадобились бы наименования выше квадрильона, так как в числе этом 34 цифры (2 и 33 ноля): 2000 квинтильонов.

Если вам интересно, каковы наименования сверхисполинов, следующих за квадрильоном, вы найдете их в приводимой здесь табличке:

наименование	*сколько нолей при единице*
квадрильон	24
квинтильон	30
секстильон	36
септильон	42

---

[1] Световой год — расстояние, проходимое светом в один год.

октальон	48
нональон	54
декальон	60
эндекальон	66
додекальон	72

Как велики выражаемые этими наименованиями числа, видно хотя бы из того, что число граммов вещества в видимой вселенной (по современным воззрениям) „всего“ 10 нональонов.

ПОЖИРАТЕЛИ ЧИСЛОВЫХ ИСПОЛИНОВ

В заключение остановимся на арифметическом (вернее, пожалуй, геометрическом) великане особого рода — на кубической миле; мы имеем в виду географическую милю, составляющую 15-ю долю экваториального градуса и заключающую 7420 *м*. С кубическими мерами воображение наше справляется довольно слабо; мы обычно значительно преуменьшаем их величину, особенно для крупных единиц, с которыми приходится иметь дело в астрономии. Но если мы превратно представляем себе уже кубическую милю — самую большую из наших объемных мер,— то как ошибочны должны быть наши представления об объеме земного шара, других планет, Солнца! Стоит поэтому уделить немного времени и внимания, чтобы постараться приобрести более соответствующее представление о кубической миле.

В дальнейшем воспользуемся картинным изложением одного талантливого популяризатора:

„Положим, что по прямому шоссе мы можем видеть на целую географическую милю вперед. Сделаем мачту длиной в милю и поставим ее на одном конце дороги, у верстового столба. Теперь взглянем вверх и посмотрим, как высока наша мачта. Положим, что возле этой мачты стоит одинаковой с ней высоты человеческая статуя более 7 *км* высоты. В такой статуе колено будет находиться на высоте 1800 *м*; нужно было бы взгромоздить одну на другую 25 египетских пирамид, чтобы достигнуть до поясницы статуи!

Вообразим теперь, что мы поставили две такие мачты, вышиной в милю, на расстоянии мили одна от другой и соединили обе мачты досками; получилась бы стена в милю длины и милю вышины. Это квадратная миля.

Мы имеем деревянную стену, стоящую отвесно. Представим себе еще четыре подобные стены, сколоченные вместе, как ящик. Сверху прикроем его крышкой в милю длины и милю ширины. Ящик этот займет объем кубической мили. Посмотрим теперь, как он велик, то-есть что и сколько в нем может поместиться.

Начнем с того, что, сняв крышку, бросим в ящик все здания Ленинграда. Они займут там очень немного места. Отправимся в Москву и по дороге захватим все крупные и мелкие города. Но так как все это покрыло только дно ящика, то для заполнения его поищем материалов в другом месте. Возьмем Париж со всеми его триумфальными воротами, колоннами, башней и бросим туда же. Все это летит, как в пропасть; прибавка едва заметна. Прибавим Лондон, Вену, Берлин. Но так как всего этого мало, чтобы хоть сколько-нибудь заполнить пустоту в ящике, то станем бросать туда без разбора все города, крепости, за́мки, деревни, отдельные здания. Все-таки мало! Бросим туда все, что только сделано руками человека в Европе; но ящик едва наполняется до одной четверти. Прибавим все корабли мира; и это мало помогает. Бросим в ящик все египетские пирамиды, все рельсы Старого и Нового Света, все машины и фабрики мира — все, что сделано людьми в Азии, Африке, Америке, Австралии. Ящик заполняется едва до половины. Встряхнем его, чтобы в нем улеглось ровнее, и попробуем, нельзя ли дополнить его. Если бы мы пожелали поместить в ящике весь живой мир: всех лошадей, быков, ослов, мулов, баранов, верблюдов, на них наложить всех птиц, рыб, змей — все, что летает и ползает, — то и тогда не наполнили бы ящика доверху без помощи скал и песку.

Такова кубическая миля. А из земного шара можно сделать 660 миллионов подобных ящиков! При всем почтении к кубической миле, к земному шару приходится питать еще большее уважение“.

К сказанному прибавим еще от себя, что кубическая миля пшеничных зерен насчитывала бы их несколько триллионов. Как видите, этот кубический исполин — настоящий пожиратель других исполинов.

Весьма внушительную вместимость имеет и кубический километр.

Нетрудно подсчитать, что ящик в 1 *куб. км* мог бы вместить 5000 биллионов спичек, вплотную уложенных; для изготовления такого количества спичек фабрика, выпускающая миллион спичек в сутки, должна была бы работать 14 миллионов лет; а чтобы такое число спичек доставить, потребовалось бы 10 миллионов вагонов — поезд длиной в миллион километров, в $2^1/_2$ раза длиннее земного экватора.

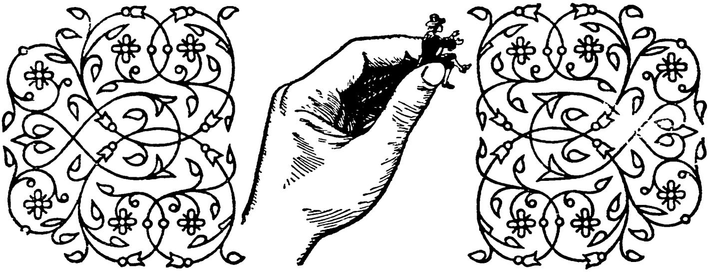
ИСПОЛИНЫ ВРЕМЕНИ

Огромные промежутки времени представляются нами еще более смутно, чем огромные расстояния и объемы. Геология учит, что со времени отложения наиболее древних пластов земной коры протекли сотни миллионов лет. Как ощутить неизмеримую огромность таких периодов времени? Один ученый предлагает для этого такой способ:

„Все протяжение истории Земли представим в виде прямой линии в 500 *км*. Это расстояние пусть изображает те 500 миллионов лет, которые протекли от начала кембрийской эпохи (одна из древнейших эпох истории земной коры). Так как километр представляет длительность миллиона лет, то последние 500—1000 *м* изобразят длительность ледникового периода; а 6000 лет мировой истории сократятся до 6 *м* — длины комнаты, в масштабе которой 70 лет жизни человека представляются линией в 7 *см*. Если заставить улитку проползти все названное расстояние с нормальной для нее скоростью 3,1 *мм* в секунду, то на все расстояние ей понадобится ровно 5 лет. А все протяжение от начала первой мировой войны до наших дней она одолеет в 13 секунд... Мы видим, как ничтожны в масштабе истории Земли те небольшие сроки, которые человек может объять своим умом...“

ЗАДАЧА-ШУТКА

Какое число делится на все числа без остатка?



ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ЧИСЛОВЫЕ ЛИЛИПУТЫ

ОТ ВЕЛИКАНОВ К КАРЛИКАМ

Гулливер в своих странствованиях, покинув карликов-лилипутов, очутился среди великанов. Мы путешествуем в обратном порядке: познакомившись с числовыми исполинами, переходим к миру лилипутов — к числам, которые во столько же раз меньше единицы, во сколько единица меньше арифметического великана.

Разыскать представителей этого мира не составляет никакого труда: для этого достаточно написать ряд чисел, обратных миллиону, миллиарду, биллиону и т. д., то-есть делить единицу на эти числа. Получающиеся дроби

$$\frac{1}{1\,000\,000}, \qquad \frac{1}{1\,000\,000\,000}, \qquad \frac{1}{1\,000\,000\,000\,000} \text{ и т. д.}$$

есть типичные числовые лилипуты, такие же пигмеи[1]

---

[1] Пигмей — человек крошечного роста.

по сравнению с единицей, каким является единица по сравнению с миллионом, миллиардом, биллионом и прочими числовыми исполинами.

Вы видите, что каждому числу-исполину соответствует число-лилипут и что, следовательно, числовых лилипутов существует не меньше, чем исполинов. Для них также придуман сокращенный способ обозначения. Мы уже упоминали, что весьма большие числа в научных сочинениях (по астрономии, физике) обозначаются так:

1 000 000	10^6
10 000 000	10^7
400 000 000	$4 \cdot 10^8$
6 квадрильонов	$6 \cdot 10^{24}$ и т. д.

Соответственно этому числовые лилипуты обозначаются следующим образом:

$\frac{1}{1\,000\,000}$	10^{-6}
$\frac{1}{100\,000\,000}$	10^{-8}
$\frac{3}{1\,000\,000\,000}$	$3 \cdot 10^{-9}$ и т. д.

Есть ли, однако, реальная надобность в подобных дробях? Приходится ли когда-нибудь действительно иметь дело со столь мелкими долями единицы?

Об этом интересно побеседовать подробнее.

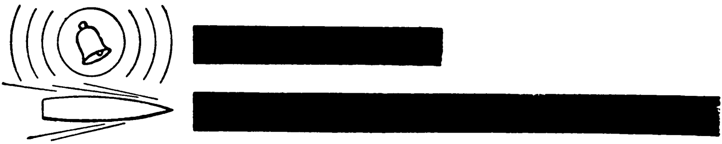
ЛИЛИПУТЫ ВРЕМЕНИ

Секунда, по обычному представлению, — настолько малый промежуток времени, что с весьма мелкими частями ее не приходится иметь дела ни при каких обстоятельствах. Легко написать $\frac{1}{1000}$ секунды, но это чисто бумажная величина, потому что ничего будто бы не может произойти в такой ничтожный промежуток времени.

Так думают многие, но ошибаются, потому что в тысячную долю секунды могут успеть совершиться весьма многие явления.

Поезд, проходящий 36 *км* в час, делает в секунду 10 *м* и, следовательно, в течение 1000-й доли секунды успевает продвинуться на сантиметр. Звук в воздухе переносится в течение 1000-й доли секунды на 33 *см*, а пуля, покидающая ружейный ствол со скоростью 700—800 *м* в секунду, переносится за тот же промежуток времени на 70 *см*. Земной шар перемещается каждую 1000-ю долю секунды, в своем обращении вокруг Солнца, на 30 *м*. Струна, издающая высокий тон, делает в 1000-ю долю секунды два-четыре и более полных колебания; даже комар успевает в это время взмахнуть вверх или вниз своими крылышками. Молния длится гораздо меньше 1000-й доли секунды: в течение этого промежутка времени успевает возникнуть и прекратиться столь значительное явление природы (молния простирается в длину на целые километры).

Но — возразите вы — 1000-ю долю секунды еще нельзя признать за лилипута, как никто не назовет тысячу числовым гигантом. Вот если взять миллион-



Как ни мала 1000-я доля секунды, за это время звук успевает пройти 33 *см*, а винтовочная пуля пролетает 70 *см*.

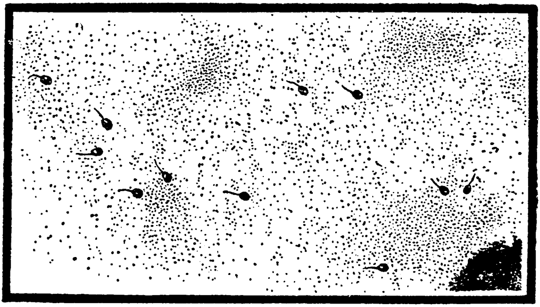
ную долю секунды, то уж наверное можно утверждать, что это величина нереальная — промежуток времени, в течение которого ничего произойти не может. Ошибаетесь! Даже и одна 1 000 000-я доля секунды — для современного физика, например, — вовсе не чрезмерно маленький промежуток. В области явлений световых (и электрических) ученому сплошь и рядом приходится иметь дело с гораздо более мелкими частями секунды. Напомним прежде всего, что световой луч пробегает ежесекундно (в пустоте) 300 000 *км*; следовательно, в 1 000 000-ю долю секунды свет успевает перенестись на расстояние 300 *м* — примерно на столько же, на сколько переносится в воздухе звук в течение целой секунды.

Далее: свет есть явление волнообразное, и число световых волн, минующих ежесекундно каждую точку пространства, исчисляется сотнями биллионов. Те световые волны, которые, действуя на наши глаза, вызывают ощущение красного света, имеют частоту колебаний 400 биллионов в секунду; это значит, что в течение одной 1 000 000-й доли секунды в наш глаз вступает 400 миллионов волн, а одна волна вступает в глаз в течение 400 000 000 000 000-й доли секунды. Вот подлинный числовой лилипут!

Но этот несомненный, реально существующий лилипут является истинным великаном по сравнению с еще более мелкими долями секунды, с которыми физик встречается при изучении рентгеновых лучей. Эти удивительные лучи, обладающие свойством проникать через многие непрозрачные тела, представляют собой, как и видимые лучи, волнообразное явление, но частота колебаний у них значительно больше, чем у видимых: она достигает 2500 биллионов в секунду. Волны следуют тут одна за другой в 60 раз чаще, чем в лучах видимого красного света. Значит, и в мире лилипутов существуют свои великаны и карлики. Гулливер был выше лилипутов всего в дюжину раз и казался им великаном. Здесь же один лилипут больше другого в пять дюжин раз и, следовательно, имеет право именоваться по отношению к нему исполином.

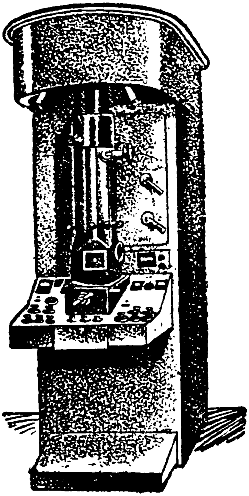
ЛИЛИПУТЫ ПРОСТРАНСТВА

Интересно рассмотреть теперь, какие наименьшие расстояния приходится отмеривать и оценивать современным исследователям природы.



Пожиратели микробов — бактериофаги — похожи на круглые шарики с хвостиком; хвостик имеет длину немного больше 100 000-й доли миллиметра, а тельце — еще меньше. Это настоящие лилипуты.

В метрической системе мер наименьшая единица длины для обиходного употребления — миллиметр; он примерно вдвое меньше толщины спички. Чтобы измерять предметы, видимые простым глазом, такая единица длины достаточно мелка. Но для измерения бактерий и других мелких объектов, различимых только в сильные микроскопы, миллиметр чересчур крупен.



Электронный микроскоп с увеличением в 100 000 раз позволяет видеть и бактериофагов.

Ученые обращаются для таких измерений к более мелкой единице — микрону, который в 1000 раз меньше миллиметра. Так называемые красные кровяные тельца, которые насчитываются десятками миллионов в каждой капельке нашей крови, имеют в длину 7 микронов и в толщину 2 микрона. Стопка из 1000 таких телец имеет толщину спички.

Как ни мелок кажется нам микрон, он все же оказывается чрезмерно крупным для расстояний, которые приходится измерять современному физику. Мельчайшие, недоступные даже микроскопу частицы — молекулы, — из которых состоит вещество всех тел природы, и слагающие их еще более мелкие — атомы — имеют размеры от одной 100-й до одной 1000-й доли микрона[1]. Если остановиться на последней величине, то и тогда окажется, что миллион таких крупинок (а мы уже знаем, как велик миллион), будучи расположен на одной прямой, вплотную друг к другу, занял бы всего миллиметр.

Чтобы представить себе наглядную чрезвычайную малость атомов, обратимся к такой картине. Вообразите, что все предметы на земном шаре увеличились в миллион раз. Эйфелева башня в Париже (300 *м* высоты) уходила бы тогда своей верхушкой на 300 000 *км* в мировое пространство и находилась бы в недалеком

---

[1] Мельчайшая единица длины, употребляемая в современной физике, есть *ИКС*; он равен 10 000 000-й доле микрона.

соседстве от орбиты Луны. Люди были бы величиной в $^1/_4$ земного радиуса — в 1700 *км*; один шаг такого человека-гиганта унес бы его на 600—700 *км*. Мельчайшие красные тельца, миллиардами плавающие в его крови, имели бы каждое более 7 *м* в поперечнике. Волос имел бы 100 *м* в толщину. Мышь достигала бы 100 *км* в длину, муха — 7 *км*. Каких же размеров будет при таком чудовищном увеличении атом вещества?

Положительно не верится: его размеры предстанут пред вами в виде... типографской точки шрифта этой книги!

Достигаем ли мы здесь крайних пределов пространственной малости, за которые не приходится переступать даже физику с его изощренными приемами измерений? Еще не особенно давно думали так; но теперь установлено, что атом — целый мир, состоящий из гораздо более мелких частиц и являющийся ареной действия могущественных сил. Например, атом водорода состоит из центрального ядра и быстро обращающегося вокруг него электрона. Не входя в другие подробности, скажем только, что поперечник электрона измеряется биллионными долями миллиметра. Другими словами, поперечник электрона почти в миллион раз меньше поперечника атома. Если же пожелаете сравнить размеры электрона с размерами пылинки, то расчет покажет вам, что электрон меньше пылинки примерно во столько же раз, во сколько пылинка меньше — чего бы вы думали? — земного шара!

Вы видите, что атом — лилипут среди лилипутов — является в то же время настоящим исполином по сравнению с электроном, входящим в его состав, — таким же исполином, каким вся солнечная система является по отношению к земному шару.

Можно составить следующую поучительную лестницу, в которой каждая ступень является исполином по отношению к предыдущей ступени и лилипутом по отношению к последующей:

электрон
атом
пылинка
дом
земной шар
солнечная система
расстояние до Полярной звезды
Млечный Путь

Каждый член этого ряда примерно в четверть миллиона раз[1] больше предыдущего и во столько же раз меньше последующего. Ничто не доказывает так красноречиво всю относительность понятий „большой“ и „малый“, как эта табличка. В природе нет безусловно большого или безусловно малого предмета. Каждая вещь может быть названа и подавляюще огромной и исчезающе малой, в зависимости от того, как на нее взглянуть, с чем ее сравнить.

СВЕРХИСПОЛИН И СВЕРХЛИЛИПУТ

Наши беседы о великанах и карликах из мира чисел были бы неполны, если бы мы не рассказали читателю об одной изумительной диковинке этого рода — диковинке, правда, не новой, но стоящей дюжины новинок. Чтобы подойти к ней, начнем со следующей, на вид весьма незамысловатой задачи:

---

[1] Имеются в виду линейные размеры (а не объемы), то-есть поперечник атома, диаметр солнечной системы, высота или длина дома и т. п. Подробнее о такого рода сопоставлениях см. книгу Я. И. Перельмана „Знаете ли вы физику?“

Какое самое большое число можно написать тремя цифрами, не употребляя никаких знаков действия?

Хочется ответить: 999, но, вероятно, вы уже подозреваете, что ответ другой; иначе задача была бы чересчур проста. И, действительно, правильный ответ пишется так:

$$9^{9^{9}}$$

Выражение это означает: „девять в степени девять в девятой степени[1]“. Другими словами: нужно составить произведение из стольких девяток, сколько единиц в результате умножения:

$$9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9.$$

Достаточно только начать вычисление, чтобы ощутить огромность ожидаемого результата. Если у вас хватит терпения выполнить перемножение девяти девяток, вы получите число:

$$387\,420\,489.$$

Главная работа только начинается: теперь нужно найти

$$9^{387\,420\,489},$$

то-есть произведение 387 420 489 девяток. Придется сделать круглым счетом 400 миллионов умножений...

У вас, конечно, не будет времени довести до конца подобное вычисление. Но я лишен возможности сообщить вам готовый результат — по трем причинам, которые нельзя не признать уважительными. Во-первых, число это никогда и никем еще не было вычислено (известен только приближенный результат). Во-вторых,

---

[1] На языке математики такое выражение называется „третьей сверхстепенью девяти“.

если бы даже оно и было вычислено, то, чтобы напечатать его, понадобилось бы не менее тысячи таких книг, как эта, потому что число наше состоит из 369 693 061 цифры; набранное обыкновенным шрифтом, оно имело бы в длину 1000 *км* — от Ленинграда до Горького. Наконец, если бы меня снабдили достаточным количеством бумаги и чернил, я и тогда не мог бы удовлетворить вашего любопытства. Вы легко можете сообразить почему: если я способен писать, скажем, без перерыва по две цифры в секунду, то в час я напишу 7200 цифр, а в сутки, работая непрерывно день и ночь, — не более 172 800 цифр. Отсюда следует, что, не отрываясь ни на секунду от пера, трудясь круглые сутки изо дня в день без отдыха, я просидел бы за работой не менее 7 лет, прежде чем написал бы это число...

Могу сообщить вам, что это число начинается цифрами 428 124 773 175 747 048 036 987 118 и кончается 89. Что находится между этим началом и концом — неизвестно. А ведь там 369 693 061 цифра!..

Вы видите, что уже число цифр нашего результата невообразимо огромно. Как же велико само число, выражаемое этим длиннейшим рядом цифр? Трудно дать хотя бы приблизительное представление о его громадности, потому что такого множества вещей, считая даже каждый электрон за отдельную вещь, нет в целой вселенной!

Архимед вычислил некогда, сколько песчинок заключал бы в себе мир, если бы весь он, до неподвижных звезд, наполнен был тончайшим песком. У него получился результат, не превышающий единицы с 63 нолями. Наше число состоит не из 64, а почти из 370 миллионов цифр — следовательно, оно неизмеримо превышает огромное число Архимеда.

Поступим же по примеру Архимеда, но вместо „исчисления песчинок“ произведем „исчисление электронов“. Вы уже знаете, что электрон меньше песчинки примерно во столько же раз, во сколько раз песчинка меньше земного шара. Для радиуса видимой вселенной примем расстояние в миллиард световых лет[1]. Так как свет пробегает в секунду 300 000 *км*, а в году 31 миллион секунд, то можно считать, что световой год равен круглым счетом 10 биллионам километров (гнаться за большей точностью здесь бесполезно). Значит, для радиуса всей известной нам вселенной получаем величину 10 миллиардов биллионов километров, или, прибегая к способу изображения числовых великанов, объясненному раньше, 10^{22} *км*.

Объем шара такого радиуса можно вычислить по правилам геометрии: он равен (с округлением) $44 \cdot 10^{66}$ *куб. км*. Умножив это число на число кубических сантиметров в кубическом километре (10^{15}), получим для объема[2] видимой вселенной величину 10^{81} *куб. см*.

Теперь представим себе, что весь этот объем сплошь заполнен самыми тяжелыми из известных нам атомов — атомами элемента урана, которых идет на грамм около 10^{22} штук. Их поместилось бы в шаре указанного объема 10^{103} штуки. Дознано, что в каждом атоме урана содержится 238 электронов (внешних и внутренних). Поэтому во всей доступной нашему исследованию вселенной могло бы поместиться не более 10^{106} электронов.

---

[1] Самый далекий небесный предмет, известный астрономам, находится на расстоянии 100 миллионов световых лет, то-есть вдесятеро ближе.

[2] Небезинтересно отметить, что Архимед в своем исчислении песчинок определял объем вселенной в $5 \cdot 10^{54}$ *куб. см*.

Число, состоящее „всего лишь“ из 107 цифр... Как это мизерно по сравнению с нашим числовым великаном почти из 370 миллионов цифр!

Вы видите, что, наполняя сплошь видимую вселенную электронами, мы не исчерпали и небольшой доли того исполинского числа, которое скромно скрывается под изображением:

$$9^{9^{9}}$$

Познакомившись с этим замаскированным гигантом, обратимся к его противоположности.

Соответствующий числовой лилипут получится, если разделим единицу на это число. Будем иметь:

$$\frac{1}{9^{9^{9}}},$$

что равно:

$$\frac{1}{9^{387420489}}.$$

Мы имеем здесь знакомое нам огромное число в знаменателе. Сверхвеликан превратился в сверхлилипута.

Необходимо сделать существенное замечание о великане из трех девяток. Я получил немало писем от читателей с утверждением, что выражение это вовсе не так трудно вычислить; ряд читателей даже выполнили требуемый расчет, употребив на него сравнительно немного времени. Результат оказался несравненно скромнее того, о котором у меня рассказано. В самом деле, пишут они,

$$9^9 = 387\,420\,489;$$

возвысив же 387 420 489 в 9-ю степень, получаем число „всего лишь“ из 72 цифр. Это хотя и не мало, но до 370 миллионов цифр от него еще очень далеко...

Читатели недоумевают, а между тем ошибка их в том, что ими неправильно понят смысл трехъярусного выражения из девяток. Они понимают его так:

$$(9^9)^9,$$

в то время как правильное его понимание иное:

$$9^{(9^9)}.$$

Отсюда огромная разница в итогах вычисления.

Оба способа понимания приводят к одинаковому результату только в одном случае: когда мы имеем выражение

$$2^{2^2}.$$

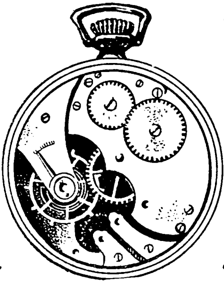
Тут безразлично, как вести вычисление: в обоих случаях получается один результат — 16.

Любопытно, что сейчас приведенное выражение вовсе не означает самого большого числа, какое можно изобразить тремя двойками. Можно получить гораздо большее число, если расположить двойки так:

$$2^{22}.$$

Это выражение равно 4 194 304, то-есть значительно больше 16.

Как видите, третья сверхстепень не во всех случаях выражает наибольшее число, какое можно изобразить тремя одинаковыми цифрами.



ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПУТЕШЕСТВИЯ

ВАШЕ КРУГОСВЕТНОЕ ПУТЕШЕСТВИЕ

В молодости я занимался в редакции одного распространенного ленинградского журнала, где состоял секретарем. Однажды мне подали визитную карточку посетителя. Я прочел на ней незнакомое имя и весьма необычное обозначение профессии: „первый русский кругосветный путешественник пешком“. По обязанности службы мне не раз доводилось беседовать с путешественниками по всем частям света и даже с кругосветными, но о „кругосветном путешественнике пешком“ я еще не слыхал. С любопытством поспешил я в приемную, чтобы познакомиться с этим предприимчивым и неутомимым человеком.

Замечательный путешественник был молод и имел очень скромный вид. На вопрос, когда успел он совершить свое необыкновенное путешествие, „первый русский кругосветный и т. д.“ объяснил мне, что теперь оно именно и совершается. Маршрут? Шувалово — Ленинград [1]; о дальнейшем он желает посоветоваться со мной... Из разговора выяснилось, что планы „первого русского и т. д.“ довольно смутны, но, во всяком случае, не предусматривают оставления пределов России.

— Как же в таком случае совершите вы кругосветное путешествие? — с изумлением спросил я.

— Главное дело длину земного обхвата пройти; это можно и в России сделать, — разрешил он мое недоумение. — Десять километров уже пройдено, и остается...

— Всего тридцать девять тысяч девятьсот девяносто. Счастливого пути!..

Не знаю, как странствовал „первый и т. д.“ на протяжении остальной части своего пути. Но что он успешно выполнил свое намерение, я нисколько не сомневаюсь. Даже если он больше вовсе не странствовал, а сразу возвратился в родное Шувалово и безвыездно проживал там, — он и в таком случае прошел не менее 40 000 *км*. Беда только, что он не первый и не единственный человек, совершивший такой подвиг. И вы, и я, и большинство других граждан нашего Союза имеют столько же прав называться „русским кругосветным путешественником пешком“ в понимании шуваловского ходока. Потому что каждый из нас, какой бы он ни был домосед, успел в течение своей жизни, сам того не подозревая, пройти пешком путь даже более длинный, чем окружность земного шара. Маленький арифметический подсчет убедит вас в этом.

В течение каждого дня вы, конечно, не менее 5 ча-

---

[1] Шувалово — небольшая станция в 10 *км* от Ленинграда.

сов проводите на ногах: ходите по комнатам, по двору, по улице, — словом, так или иначе, шагаете. Если бы у вас в кармане был шагомер (прибор для подсчета сделанных шагов), он показал бы вам, что вы ежедневно делаете не менее 30 000 шагов. Но и без шагомера ясно, что расстояние, проходимое вами в день, очень внушительно. При самой медленной ходьбе человек делает в час 4—5 *км*. Это составляет в день, за 5 часов, 20—25 *км*.

Теперь остается умножить дневной переход на 360 — и мы узнаем, какой путь каждый из нас проходит в течение целого года:

$$20 \times 360 = 7200, \text{ или же } 25 \times 360 = 9000.$$

Итак, даже малоподвижный человек, никогда не покидавший родного города, проходит ежегодно пешком около 8000 *км*. А так как окружность земного шара имеет 40 000 *км*, то нетрудно вычислить, во сколько лет совершаем мы пешеходное путешествие, равное кругосветному:

$$40\,000 : 8\,000 = 5.$$

Значит, в течение 5 лет вы проходите путь, по длине равный окружности земного шара. Каждый 13-летний мальчик, если считать, что он начал ходить с двухлетнего возраста, дважды совершил уже кругосветное путешествие. Каждый 25-летний человек выполнил не менее

Каждый 13-летний мальчик успел уже дважды совершить кругосветное путешествие.

четырех таких путешествий. А дожив до 60 лет, мы десять раз обойдем вокруг земного шара, то-есть пройдем путь более длинный, чем от Земли до Луны (380 000 *км*).

Таков неожиданный результат подсчета столь обыденного явления, как ежедневная наша ходьба по комнате и вне дома.

ВАШЕ ВОСХОЖДЕНИЕ НА МОНБЛАН[1]

Вот еще один интересный подсчет. Если вы спросите почтальона, ежедневно разносящего письма по адресатам, или врача, целый день занятого посещением пациентов, совершили ли они восхождение на Монблан, они, конечно, удивятся такому вопросу. Между тем вы легко можете доказать каждому из них, что, не будучи альпинистами, они наверно совершили уже восхождение на высоту, даже превышающую величайшую вершину Альп.

Стоит только подсчитать, на сколько ступеней поднимается почтальон ежедневно, восходя по лестнице при разноске писем, или врач, посещая больных. Окажется, что самый скромный почтальон, самый занятой врач, никогда даже и не помышлявшие о спортивных состязаниях, побивают мировые рекорды горных восхождений. Подсчитайте это.

Возьмем для подсчета довольно скромные средние цифры. Допустим, что почтальон ежедневно посещает только десять человек, живущих кто на втором этаже, кто на третьем, четвертом, пятом — в среднем возьмем на третьем. Высоту третьего этажа примем, для круг-

---

[1] Монблан — высочайшая вершина Альп и всей Европы — 4810 *м* высоты.

Почтальон в течение года 8 раз поднимается на высоту самых больших в Европе гор.

лого числа, в 10 *м*: следовательно, наш почтальон ежедневно совершает по ступеням лестниц путешествие на высоту 10×10=100 *м*. Высота Монблана 4810*м*. Разделив ее на 100, вы узнаете, что наш скромный почтальон выполняет восхождение на Монблан в 48 дней...

Итак, каждые 48 дней, или примерно 8 раз в год, почтальон поднимается по лестницам на высоту, равную высочайшей вершине Европы. Скажите, какой спортсмен ежегодно по 8 раз взбирается на Монблан? Для врача у меня имеются не предположительные, а реальные цифры. Врачи квартирной помощи в Ленинграде подсчитали, что в среднем каждый из них за свой рабочий день поднимается к больным на 2500 ступеней. Считая высоту ступеньки равной 15 *см* и принимая 300 рабочих дней в году, получаем, что за год врач поднимается на 112 *км*, то-есть совершает более 20 раз восхождение на высоту Монблана, или — если угодно — поднимается в 5 раз выше полета стратостата „Осоавиахим-1“.

Не надо непременно быть почтальоном или врачом, чтобы выполнять подобные подвиги, конечно того не ведая.

Я живу на втором этаже, в квартире, куда ведет лестница с 20 ступеньками — число, казалось бы, весьма скромное. Ежедневно мне приходится взбегать по этой лестнице 5 раз, да еще посещать две квартиры, расположенные, скажем, на такой же высоте.

В среднем можно принять, что я поднимаюсь ежедневно 7 раз по лестнице с 20 ступеньками, то-есть взбегаю вверх каждый день на 140 ступеней. Сколько же это составит в течение года?

$$140 \times 360 = 50\,400.$$

Итак, ежегодно я поднимаюсь более чем на 50 000 ступеней. В 60 лет я успею подняться на вершину сказочно-высокой лестницы — в 3 миллиона ступеней (450 *км*)!

Как изумился бы я, если бы ребенком меня подвели к основанию этой лестницы, уходящей в бесконечную даль, и сказали, что некогда я, быть может, достигну ее вершины...

На какие же исполинские высоты взбираются те люди, которые по роду своей профессии только и делают, что поднимаются на высоту, — например, служители при лифтах!

Мы с гордостью узнаем, что среди наших отличников авиации есть такие, которые успели пролететь число километров, не только равное расстоянию от Земли до Луны, но даже перекрывших это расстояние во много раз.

Должно нас поражать и то, что существуют люди, которые по роду своей работы совершают путешествие на Луну „на своих на двоих“: подсчитано, что, например, служитель при лифте нью-йоркского небоскреба совершает подъем на высоту, равную расстоянию до Луны, за 15 лет службы.

НЕЗАМЕТНОЕ ПУТЕШЕСТВИЕ НА ДНО ОКЕАНА

Весьма внушительные путешествия выполняют обитатели подвальных помещений, служители таких же складов и т. п. Много раз в день сбегая вниз по ступенькам маленькой лестницы, ведущей в погреб, они в течение нескольких месяцев проходят расстояние в целые километры. Нетрудно рассчитать, во сколько времени служитель подвального склада проходит, таким образом, вниз расстояние, равное глубине океана. Если лестница углубляется, скажем, всего на 2 *м* и человек сбегает по ней ежедневно только 10 раз, то в месяц он пройдет вниз расстояние в $30 \times 20 = 600$ *м*, а в год:

$$600 \times 12 = 7200 \text{ м, более 7 км.}$$

Вспомним, что глубочайшая шахта простирается в недра земли всего на два с небольшим километра.

Итак, если бы с поверхности океана вела на его дно лестница, то любой работник подвального торгового помещения достиг бы дна океана в течение одного года.

ТРАКТОР КРУГОМ СВЕТА

Каждый трактор работает на социалистических полях наших колхозов и совхозов около 2500 часов ежегодно[1]. Средним числом он проходит в час 5 *км*. Годовой путь его, следовательно, составляет:

$$5 \times 2500 = 12\,500 \text{ км.}$$

Легко подсчитать, во сколько лет прокладывает трактор путь, равный окружности земного шара:

$$40\,000 : 12\,500 = 3{,}2.$$

---

[1] Цифры эти относятся к довоенному времени. — *Ред.*

В течение одной пятилетки трактор успеет раза полтора совершить кругосветное путешествие.

В этом отношении он обгоняет каждого из нас, незаметно совершающего в 5 лет только одно кругосветное путешествие, но зато уступает своему собрату — паровозу (товарному), который успевает на железных дорогах нашего Союза проделать „кругосветный пробег“ всего лишь в 8 месяцев (пассажирский даже в 6 месяцев).

За пятилетку трактор успевает сделать полтора кругосветных перехода.

НЕУТОМИМОЕ КОЛЕСИКО

Кругосветный путешественник имеется и у многих из нас в кармане — внутри карманных часов. Откройте заднюю крышку карманных часов и рассмотрите механизм. Все зубчатые его колеса так медленно вертятся, что с первого взгляда кажутся даже и вовсе неподвижными. Надо долго и внимательно следить за колесиками, чтобы заметить их движение. Исключение составляет только крошечный маховик — так называемый балансир,— который без устали качается взад и вперед. Движения его так проворны, что трудно сосчитать, сколько качаний успевает он сделать в секунду: 5 раз поворачивается он в течение каждой секунды то в одну, то в другую сторону попеременно. При этом колесико делает каждый раз один полный оборот и еще пятую долю.

Попробуем сосчитать, сколько оборотов делает оно в течение каждого года. Ведь в руках аккуратного человека часы никогда не останавливаются: он не забывает их во-время заводить. Каждую минуту колесико делает $5 \times 60 = 300$ качаний, а каждый час $300 \times 60 = 18\,000$. В сутки это составляет:

$$18\,000 \times 24 = 432\,000 \text{ качаний.}$$

Считая в году для круглого числа 360 дней, имеем, что ежегодно балансир делает:

$$432\,000 \times 360 = 155\,520\,000 \text{ качаний.}$$

Но было уже сказано, что балансир поворачивается при одном качании на $1^1/_5$ полного оборота. Значит, в течение года он успевает обернуться вокруг своей оси:

$$155\,520\,000 \times 1^1/_5 = 186\,624\,000 \text{ раз,}$$

круглым счетом — 187 миллионов раз.

Уже одно это огромное число достаточно удивительно. Вы поразитесь еще более, если проделаете другой расчет: вычислите, какой путь прошел бы автомобиль, если бы колеса его обернулись 187 миллионов раз. Поперечник автомобильного колеса 80 *см*: значит, окружность его — около 250 *см*, или $2^1/_2$ *м*. Умножив $2^1/_2$ на 187 миллионов, получим длину пути, которую мы желаем знать: около 470 000 *км*. Следователь но, автомобиль, будь его колеса так же неутомимы, как балансир карманных часов, более чем 10 раз обходил бы ежегодно земной шар, или — если хотите — пробегал бы путь больший, чем от нас до Луны. Нетрудно представить себе, сколько раз понадобилось бы во время такого путешествия починять и даже сменять колеса автомобиля. А между тем маленькое колесико карманных часов неутомимо качается по целым годам без починки, без новой смазки, без смены и работает притом с изумительной точностью...

ПУТЕШЕСТВУЮЩИЕ, СТОЯ НА МЕСТЕ

Последние строки книги мне хочется посвятить ее первым читателям, без деятельного сотрудничества которых она не могла появиться в свет. Я говорю, конечно, о наборщиках. Они также совершают далекие арифметические путешествия, не выходя из пределов наборной, даже стоя неподвижно у наборных касс. Проворная рука труженика „свинцовой армии“, скользя ежесекундно от кассы к верстатке, проходит за год огромное расстояние.

Сделайте подсчет. Вот данные: наборщик набирает в течение рабочего дня норму в 12 000 букв и для каждой буквы должен переместить руку туда и назад на расстояние в среднем около полуметра. В году считайте 300 рабочих дней.

$$2 \times 0{,}5 \times 12\,000 \times 300 = 3\,600\,000 \text{ } \textit{м}, \text{ то-есть } 3600 \text{ } \textit{км}.$$

Значит, за 11 лет работы даже и наборщик, не отрывающийся от кассы, совершает кругосветное путешествие. „Неподвижный кругосветный путешественник“! Это звучит куда оригинальнее, чем „кругосветный путешественник пешком“.

Не найдется человека, который так или иначе не совершил бы в этом смысле кругосветного путешествия. Можно сказать, что замечательным человеком является не тот, кто проделал кругосветное путешествие, а тот, кто его не совершил. И если кто-нибудь станет уверять вас, что он этого не сделал, вы, надеюсь, сможете „математически“ доказать ему, что он не составляет исключения из общего правила.

ОТВЕТЫ

К стр. 18

К ребусу № 1 — экспертиза.

К ребусу № 2 — ракетомобиль.

К ребусу № 3 — республика.

К стр. 59

1) 1146.

2) НН, где через Н обозначена цифра „13“.

К стр. 62

По пятеричной системе: „1304“, „1144“, „2402“.

По троичной системе: „2010“, „10210“, „110“, „10“; остаток „11“.

К стр. 68

1) $2 \times 2 = 100$, когда 100 написано по двоичной системе.

2) $2 \times 2 = 11$, когда написано по троичной системе.

3) 10 — число нечетное, когда оно написано по пятеричной системе, а также по системе с основанием 3, 7 и 9.

4) $2 \times 3 = 11$, когда 11 написано по пятеричной системе.

5) $3 \times 3 = 14$, когда 14 написано по пятеричной системе.

К стр. 69

№ 1 — по восьмеричной.

№ 2 — по шестеричной.

№ 3—число 130 в различных системах счисления выражается следующим образом:

в двоичной	10000010
в троичной	11211
в четверичной	2002

в пятеричной	1010
в шестеричной	334
в семеричной	244
в восьмеричной	202
в девятеричной	154

№ 4. По четверичной системе — 27: по пятеричной — 38; по шестеричной — 51; по семеричной — 66; по восьмеричной — 83; по девятеричной — 102.

Число это не может быть написано ни по двоичной, ни по троичной системе, так как содержит цифру 3, которой в этих системах нет. Число это по пятеричной системе делится на 2, так как сумма его цифр делится на 2. По семеричной системе оно делится на 6, а по девятеричной не делится на 4.

К стр. 162

Ответ на задачу-шутку.

Число, делящееся на все числа без остатка, есть произведение всех чисел.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА ПЕРВАЯ

СТАРОЕ И НОВОЕ О ЦИФРАХ И НУМЕРАЦИИ

Таинственные знаки 3
Старинная народная нумерация 5
Секретные торговые меты 8
Пешки вместо цифр 10
Арифметика за завтраком 12
Арифметические ребусы 16
Десятичная система в книжных шкафах 19
Арифметические знаки и названия у разных народов 21

ГЛАВА ВТОРАЯ

ПОТОМОК ДРЕВНЕГО АБАКА

Чеховская головоломка 24
Счеты 29
Умножение на счетах 34
Деление на счетах 35
Отголоски старины 36

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

НЕМНОГО ИСТОРИИ

„Трудное дело — деление" 39
Мудрый обычай старины 42
Хорошо ли мы множим? 47
„Русский" способ умножения 48
Из Страны пирамид 50

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

НЕДЕСЯТИЧНЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Простейшая система счисления 59
Необычайная арифметика 61
Чёт или нечет? 66
Дроби без знаменателя 68

ГЛАВА ПЯТАЯ

ГАЛЕРЕЯ ЧИСЛОВЫХ ДИКОВИНОК

Арифметическая кунсткамера 71
Число 12 73
Число 365 77
Три девятки 78
Число Шехеразады 79
Число 10 101 81
Число 10 001 83
Шесть единиц 83
Числовые пирамиды 85
Девять одинаковых цифр 87
Цифровая лестница 88
Магические кольца 90

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ФОКУСЫ БЕЗ ОБМАНА

Искусство индусского счетчика 97
Не открывая кошельков 99
Угадать число спичек 102
„Чтение мыслей“ по спичкам 104
Идеальный развес 107
Предсказать сумму ненаписанных чисел 111
Мнимая неожиданность 114
Мгновенное деление 116
Любимая цифра 117
Угадать дату рождения 118
Одно из „утешных действий“ Магницкого 119
Отгадывание чисел 121

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

БЫСТРЫЙ СЧЕТ

Приемы ускоренного умножения 123
Для обиходных расчетов 125

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАГАДКИ ПИРАМИДЫ ХЕОПСА

Приближенные числа 135
Округление чисел 140
Цифры значащие и незначащие 141
Сложение и вычитание приближенных чисел 141
Умножение, деление и возвышение в степень приближенных чисел 142
Применение на практике. 142
Сбережение счетного труда 144

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ЧИСЛОВЫЕ ВЕЛИКАНЫ

Как велик миллион? 146
Миллион секунд 147
В миллион раз толще волоса 148
Упражнения с миллионом 149
Числовые исполины советской современности 151
Названия числовых великанов 152
Миллиард 154
Биллион и триллион 155
Квадрильон 156
Пожиратели числовых исполинов 159
Исполины времени 161

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ЧИСЛОВЫЕ ЛИЛИПУТЫ

От великанов к карликам 163
Лилипуты времени 164
Лилипуты пространства 167
Сверхисполин и сверхлилипут 170

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПУТЕШЕСТВИЯ

Ваше кругосветное путешествие 176
Ваше восхождение на Монблан 179
Незаметное путешествие на дно океана 182
Трактор кругом света 182
Неутомимое колесико 183
Путешествующие, стоя на месте 185
ОТВЕТЫ 187

ШКОЛЬНАЯ БИБЛИОТЕКА

Оформление ***В. ДОБРОКЛОНСКОГО***

ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Перельман Яков Исидорович
ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА

*

Ответственные редакторы *Н. А. Максимова* и *Л. Я. Архарова*
Художественный редактор *В. В. Пахомов*
Технический редактор *М. Д. Суховцева*
Корректоры *Л. А. Кречетова* и *Р. С. Мишелевич*

Сдано в набор 6/IX 1954 г. Подписано к печати 14/XII 1954 г.
Формат $84 \times 108^1/_{32}$ — 6 = 9,86 печ. л. (7,13 уч.-изд. л.) Тираж
100 000 экз. А08621. Заказ № 1765. Цена 3 р. 15 к.
Детгиз. Москва, М. Черкасский пер., 1.

Отпечатано с матриц Первой Образцовой типографии
имени А. А. Жданова, Москва, Ж-54, Валовая, 28
Фабрикой детской книги Детгиза. Москва, Сущевский вал, 49.
Заказ № 1055.

Цена 3 р. 15 к.